| | |
|---|---|
| **Delprov B** | Uppgift 1-9. Endast svar krävs. |
| **Delprov C** | Uppgift 10-19. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans. |
| **Hjälpmedel** | Formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

**Delprov B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

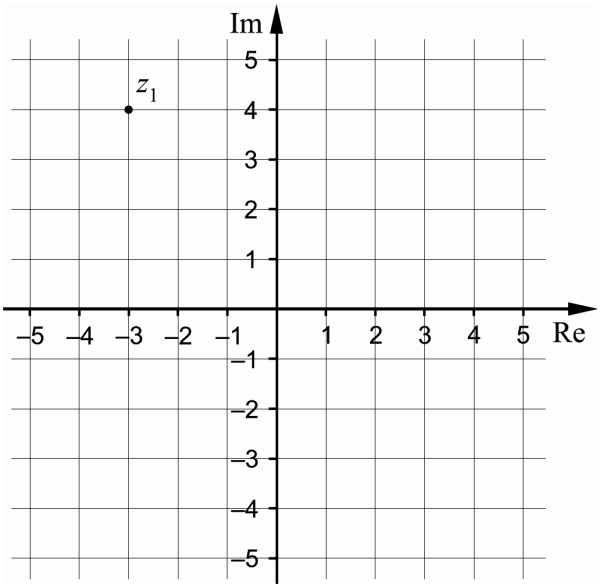
**1.** Derivera

a) $f(x) = \sin 4x + \cos x$ _____ (1/0/0)

b) $f(x) = 2x \cdot e^x$ _____ (1/0/0)

**2.** Bestäm för vilket värde på $x$ som uttrycket $123 + |x - 7|$ antar sitt minsta värde. _____ (1/0/0)

**3.** Figuren visar ett komplext talplan där talet $z_1$ är markerat.




a) Bestäm konjugatet till $z_1$ $\bar{z}_1 =$ _____ (1/0/0)

b) Markera ett tal $z_2$ i första kvadranten så att $\text{Re}\, z_2 < \text{Im}\, z_2$ (1/0/0)

c) Markera ett tal $z_3$ i tredje kvadranten så att $|z_3| = \sqrt{10}$ (0/1/0)

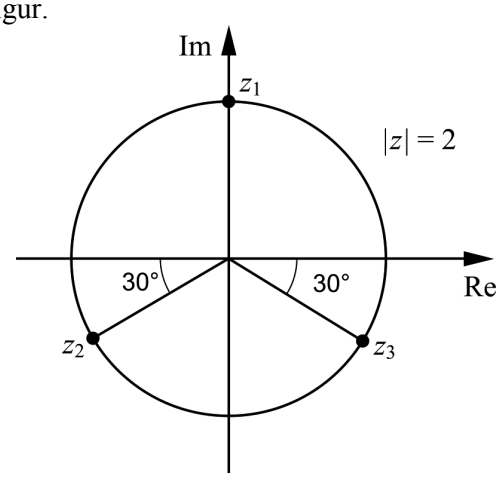
**4.** Bestäm konstanten $A$ så att det minsta värde funktionen $y = A + 5\sin 2x$ kan anta är 3 _____ (1/0/0)

**5.** Bestäm $\cos 2x$ uttryckt i $p$ om $\cos x = p$. _____ (0/1/0)

**6.** Vilket är det största värde $3 - 4\sin x \cos x$ kan anta?

_____ (0/0/1)

**7.** De komplexa talen $z_1, z_2$ och $z_3$ ligger på cirkeln $|z| = 2$
Se figur.




Bestäm en tredjegradsekvation vars rötter är $z_1, z_2$ och $z_3$ _____ (0/0/1)

**8.** Två av följande ekvationer A–G är asymptoter till $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2}$

Vilka två?

A. $x = 0$

B. $y = 0$

C. $x = 1$

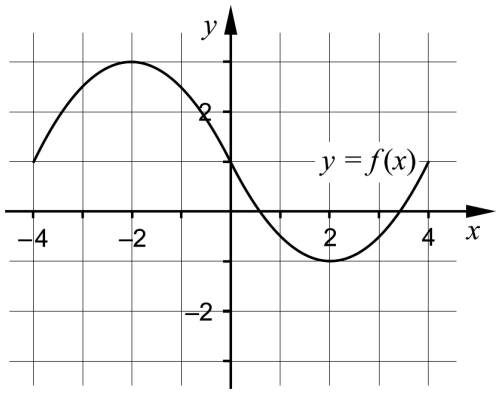
D. $y = 2$

E. $y = x^2 - 3x$

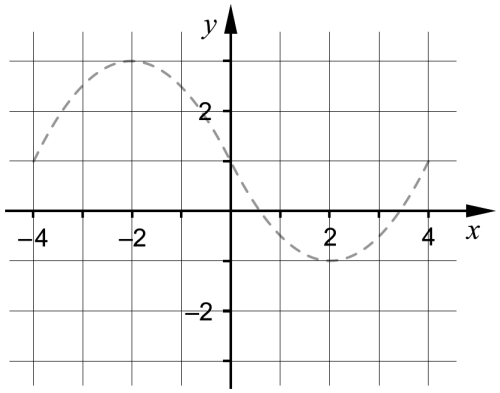
F. $y = x + 2$

G. $y = x - 3$ _____ (0/0/1)

**9.** I koordinatsystemet är kurvan $y = f(x)$ ritad.




Använd koordinatsystemet nedan och skissa kurvan $y = f(|x|)$
i intervallet $-4 \le x \le 4$
För att underlätta din skissning är kurvan $y = f(x)$ inritad med en streckad linje.

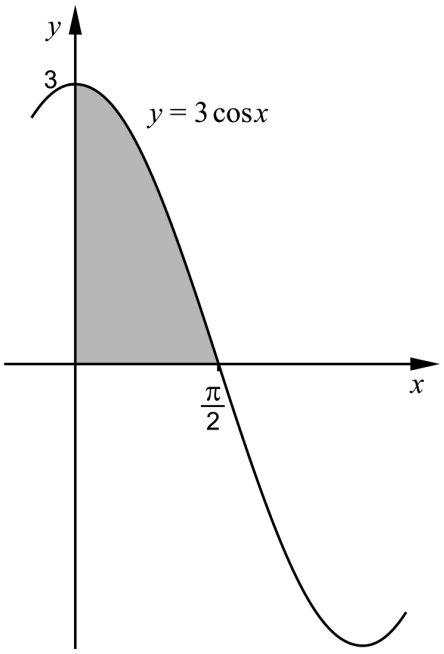



(0/0/1)

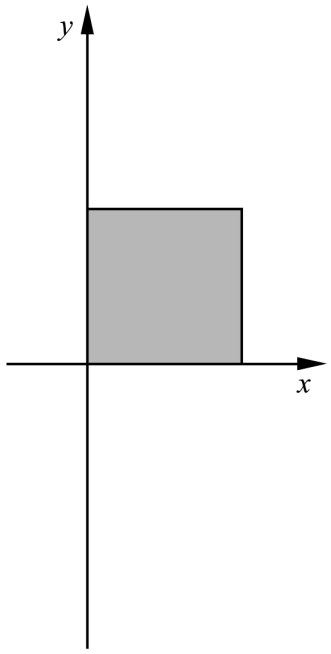
**Delprov C:** Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**10.** Det skuggade området i figur 1 begränsas av kurvan $y = 3\cos x$ och de positiva koordinataxlarna. Kvadraten i figur 2 har lika stor area som det skuggade området i figur 1.

Figur 1.




Figur 2.




Bestäm kvadratens sidlängd uttryckt i längdenheter. Svara exakt. (2/0/0)

**11.** Visa att $\dfrac{\sin x}{\tan x(\cos^2 x + \sin^2 x)} = \cos x$ för alla $x$ där uttrycken är definierade. (2/0/0)

**12.** Funktionen $f(x) = \ln x - x$ är definierad för $x > 0$ och har exakt en extrempunkt.

Bestäm extrempunktens *x*-koordinat och undersök om det är en maximi- eller minimipunkt. (2/1/0)

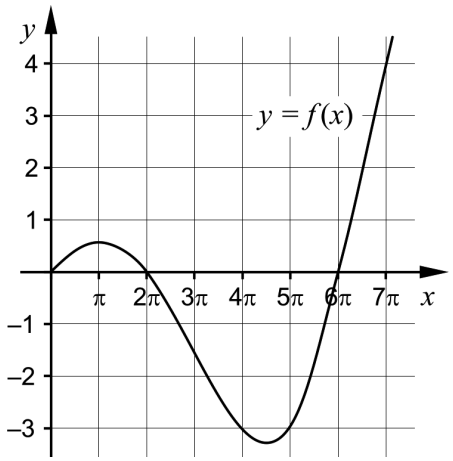
**13.** Beräkna $z^4$ då $z = \sqrt{3}(\cos 45° + \mathrm{i}\sin 45°)$
Förenkla svaret så långt som möjligt. (2/0/0)

**14.** Polynomet $p(x) = x^3 - 5x - 12$ har ett nollställe $x = 3$
Bestäm övriga nollställen till polynomet. (1/2/0)

**15.** Ekvationen $x^2 + ax + b = 0$ har en rot $x = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
Bestäm de reella konstanterna $a$ och $b$. (0/3/0)

**16.** Visa att det går att bestämma konstanten $a$ så att funktionen
$f(x) = x + \dfrac{a}{x+1}$ får ett minimum för $x = 1$ (0/3/0)

**17.** Figuren visar grafen till en funktion $y = f(x)$.




En ny funktion $g$ definieras av $g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ i intervallet $0 \le t \le 7\pi$

a) Undersök för vilket värde på $t$ som funktionen $g$ har sitt minsta värde i intervallet $0 \le t \le 7\pi$ (0/1/0)

b) Undersök antalet nollställen till funktionen $g$ i intervallet $\pi \le t \le 7\pi$ (0/0/1)

**18.** Funktionen $f(x) = x\cos x - \sin x$ har derivatan $f'(x) = -x\sin x$

a) Visa att $f'(x) = -x\sin x$ om $f(x) = x\cos x - \sin x$ (0/1/0)

b) Bestäm $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \, dx$ (0/0/2)

**19.** Visa att polynomet $p(x) = x^3 + 3x - 18$ har exakt ett reellt nollställe. (0/0/3)

| | |
|---|---|
| **Delprov D** | Uppgift 20-28. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 120 minuter. |
| **Hjälpmedel** | Digitala verktyg, formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

**Delprov D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**20.** Fredrik testar sitt blodtryck med en blodtrycksmätare. Han observerar att blodtryckets högsta värde är 129 mm Hg och att dess lägsta värde är 83 mm Hg. Fredrik vill ställa upp en funktion som beskriver blodtrycket och antar att trycket $y$ mm Hg varierar enligt sambandet $y = A\sin kt + B$, där $t$ är tiden i sekunder. Fredrik konstaterar också att tiden mellan två hjärtslag är 1,2 sekunder, vilket motsvarar perioden för denna funktion.




Faktaruta: Blodtryck

Blodtrycket är det tryck som blodet utövar i blodkärlen. Blodtrycket har sitt högsta värde (Systoliskt tryck) när hjärtat dras samman och sitt lägsta värde (Diastoliskt tryck) när hjärtat utvidgas. Blodtrycket mäts i enheten mm Hg.

Bestäm konstanterna $A$, $B$ och $k$. (2/1/0)

**21.** Ekvationen $\frac{x}{4} + \sin 3x = 2{,}65$ har flera lösningar.

Samtliga lösningar ligger i intervallet $0 \le x \le 6\pi$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror. *Endast svar krävs* (1/0/0)

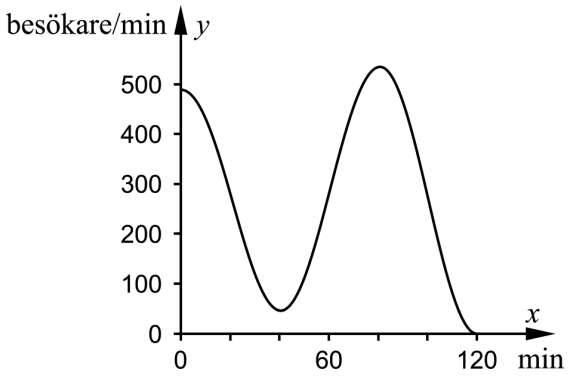
b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. *Endast svar krävs* (1/0/0)

**22.** På en biljett till One Direction på Friends Arena står det
”Konserten börjar kl. 21.30. Arenan öppnas kl. 19.30.”

Enligt en förenklad modell fylls arenan med hastigheten $y$ besökare/minut,

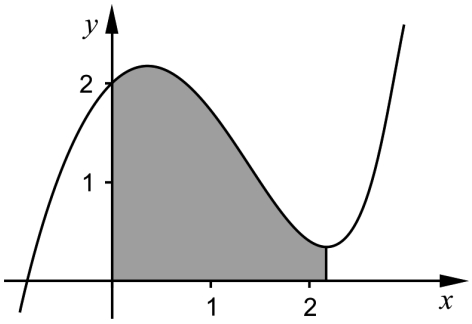
där $y = 280 + (210 + 0{,}583x) \cdot \cos\dfrac{\pi \cdot x}{40}$

och $x$ är tiden i minuter efter att arenan öppnas.
Modellen antas gälla mellan 19.30 och 21.30.




Beräkna antalet besökare i arenan då konserten börjar. (2/0/0)

**23.** Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = 1 - 2x^2 + e^x$, de positiva koordinataxlarna och en lodrät linje genom kurvans minimipunkt.
Svara med minst tre värdesiffror.




(0/2/0)

**24.** Ange en funktion som har den lodräta asymptoten $x = 1$
och som har den vågräta asymptoten $y = 2{,}5$ *Endast svar krävs* (0/1/0)

**25.** Företaget Konservburken tillverkar konserver med krossade tomater. På en viss sorts burkar med krossade tomater anges att innehållet väger 400 gram. Som ett led i företagets kvalitetskontroll vägs innehållet i ett antal burkar. Det visar sig att vikten är normalfördelad med medelvikten 404 gram och standardavvikelsen 5,0 gram. För att uppfylla företagets viktkrav ska burkarna innehålla minst 395 gram krossade tomater.




Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald konservburk innehåller minst 395 gram krossade tomater. (0/2/0)

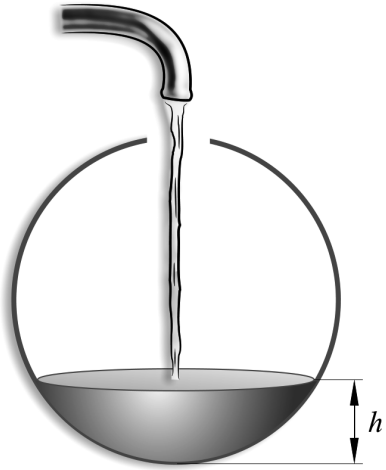
**26.** Efter en måltid stiger normalt blodsockerhalten till en början, för att sedan sjunka. Johan har fått sin blodsockerhalt undersökt under en tvåtimmarsperiod efter att han ätit frukost. Enligt en förenklad modell kan blodsockerhalten under denna period beskrivas med sambandet $y = 0{,}032x^2\mathrm{e}^{-0{,}070x} + 4{,}0$ där $y$ är blodsockerhalten i millimolar och $x$ är tiden i minuter efter frukostens slut.

a) Bestäm med vilken hastighet Johans blodsockerhalt ändras 60 minuter efter frukostens slut. (0/2/0)

b) Bestäm när Johans blodsockerhalt ökar som snabbast. (0/0/2)

**27.** Cecilia och Laila har fått i uppgift att lösa följande problem:

En sfärisk behållare har radien 5,0 dm. Vatten fylls på uppifrån med hastigheten 3,0 liter/min.




Med vilken hastighet ökar vattendjupet $h$ då det är 2,5 dm?

De inser att de först måste bestämma vattenvolymen som funktion av höjden. Cecilia genomför den bestämningen genom att ställa upp en rotationsvolym och kommer fram till $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$
där $V$ är vattenvolymen i dm$^3$ och $h$ är vattendjupet i dm.

Sedan använder Laila detta volymuttryck för att beräkna den efterfrågade hastigheten. Hon får svaret 0,051 dm/min.

a) Använd sambandet $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ och genomför Lailas beräkning. (0/2/0)

b) Genomför Cecilias bestämning av formeln $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ (0/0/2)

**28.** För kurvan $y = f(x)$ gäller att $f(x) > 0$ för alla $x$. Området som begränsas av kurvan $y = f(x)$, linjerna $x = a$ och $x = b$ samt $x$-axeln har arean $A$ areaenheter.

En annan kurva definieras av $y = k \cdot f(x)$, där $k$ är en konstant och $k \neq 1$.

Ett annat område begränsas av kurvorna $y = k \cdot f(x)$ och $y = f(x)$ samt av linjerna $x = a$ och $x = b$.
Undersök hur arean av detta område beror av $A$ och $k$. (0/0/3)