Del B	Uppgift 1-6. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 7-15. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

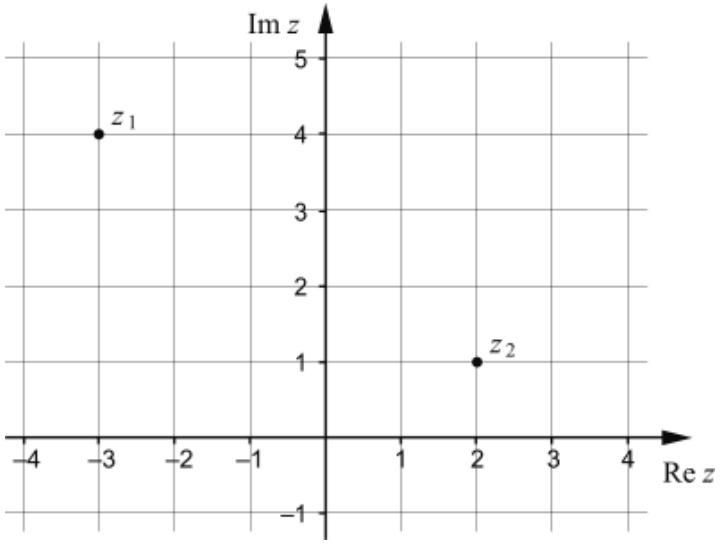
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x+1)^5$ _____ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

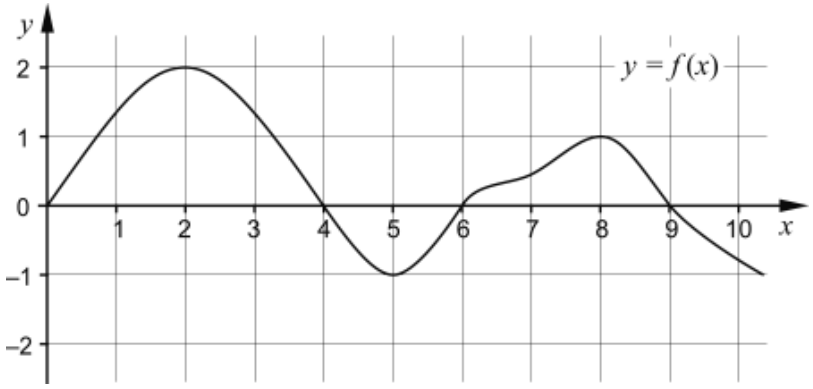


a) Bestäm $\bar{z}_2$ _____ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ _____ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ _____ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f.



För vilket värde på a i intervallet $0 \le a \le 10$ antar $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ sitt största värde? _____ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0° < v < 90°$ gäller att $\sin 3v < \dfrac{1}{2}$?

_____ (0/1/1)

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \le f(x) \le 7$

_____ (0/0/1)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Agnes får svaret e
Ingela får svaret 0
Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + \mathrm{i}$
- $z_1 = 3 - \mathrm{i}$

Bestäm z_2 på formen $a + b\mathrm{i}$ (2/0/0)

9. a) Visa att $\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right) = 1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

10. Lös ekvationen $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

11. För funktionen f gäller att $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)

b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)

c) Lös olikheten $|f(x)|>3$ där $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)

12. Ekvationen $z^p=\mathrm{i}$ ska undersökas för olika värden på heltalet p.
För vissa värden på heltalet p är $z_1=\cos 9°+\mathrm{i}\sin 9°$ en lösning till ekvationen $z^p=\mathrm{i}$

a) Visa att detta gäller för $p=50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50}=\mathrm{i}$ (0/2/0)

b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p=\mathrm{i}$ (0/0/2)

13. För polynomet p gäller att $p(z)=z^5+4z^3-2z^2-8$

a) Visa att (z^2+4) är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

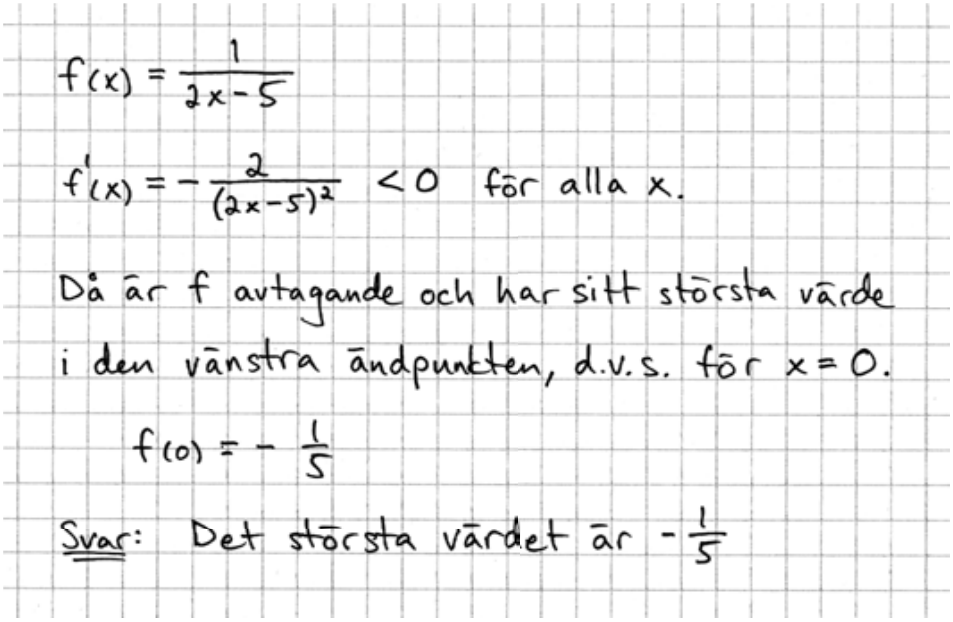
b) Lös ekvationen $z^5+4z^3-2z^2-8=0$ (0/1/2)

14. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/6}(2\sin x+5)\cos x\,\mathrm{d}x$ (0/0/2)

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

> Undersök om funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:



Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\dfrac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x = 3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften. (0/0/3)

Del D	Uppgift 16-23. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 18 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

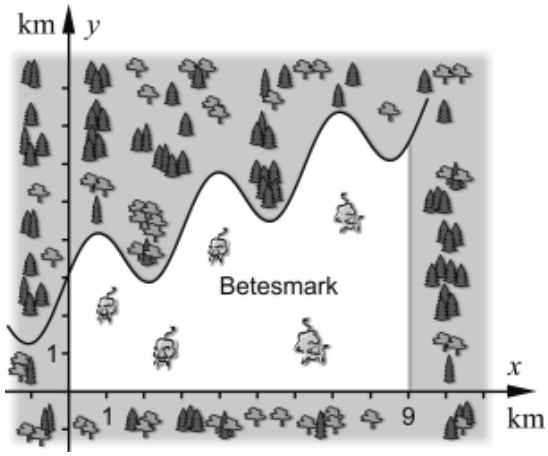
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2\text{i}$ på polär form. (2/0/0)

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen
$f(x) = 0{,}5x + \sin 2x + 3$

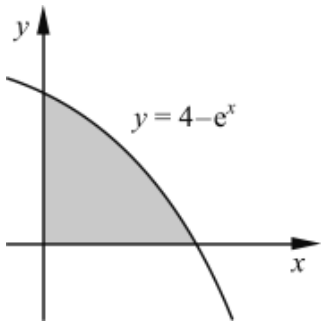
Beräkna betesmarkens area. (2/0/0)

18. Ekvationen $\frac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.
Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \le x \le 20$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror. (1/0/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. (1/0/0)

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x-axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror. (0/3/0)

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:
$\frac{dv}{dt} + 5v = 10$ där v är fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder.

a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

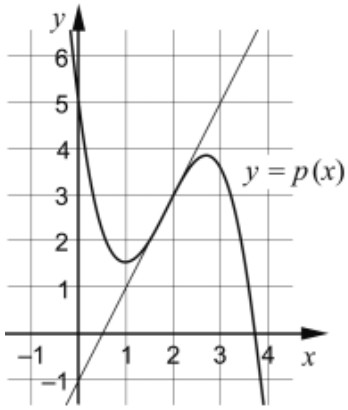
b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

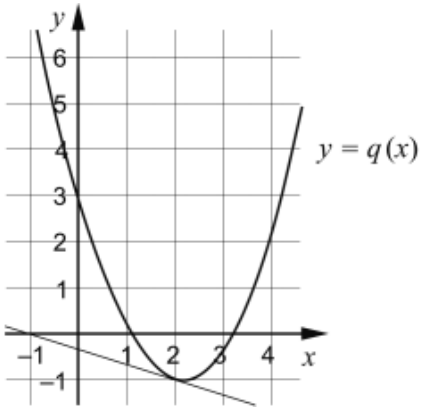
21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6}e^{-t/6}$, $t \geq 0$

a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)

b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: ”Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter.”
Bestäm värdet på x. (0/2/0)

22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$

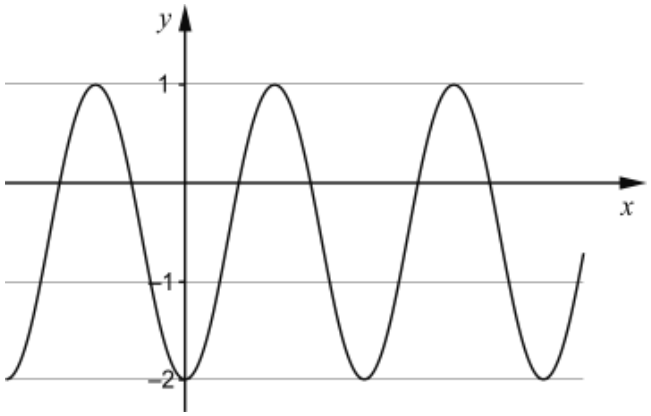




Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:

Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$
Bestäm konstanterna *A* och *B*.



Lisa löser uppgiften så här:

$A = \frac{1-(-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$B = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ Svar: $A = 1{,}5$ och $B = -0{,}5$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt. (0/0/2)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet
Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater och din lärare när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1. Polynomekvation

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

a) Visa att $z = 1$ är en lösning till ekvationen $z^4 - 7z^3 + 19z^2 - 13z = 0$

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $z^4 - 7z^3 + 19z^2 - 13z = 0$

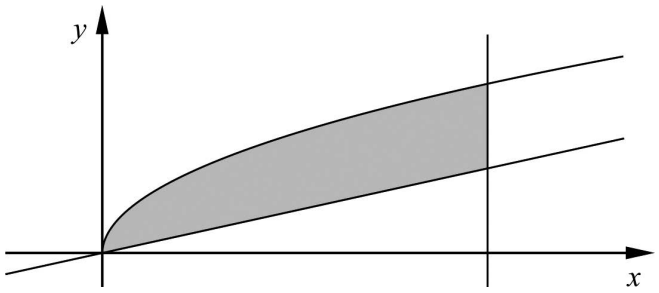
Uppgift 2. Rotationskropp

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område i första kvadranten begränsas av linjen $y = \frac{x}{4}$, linjen $x = 4$ och kurvan $y = \sqrt{x}$

Låt området rotera kring x-axeln.



Beräkna rotationskroppens volym.

Uppgift 3. En stjärnas ålder

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Rymdfysiker kan genom att analysera ljuset från en stjärna bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. Då kan man avgöra stjärnans ålder.

Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor, N, vid tiden t år. Sönderfallet kan då beskrivas med hjälp av differentialekvationen $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} - kN = 0$ där k är en konstant.

a) Visa att $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{kt}$ är en lösning till differentialekvationen.

Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades. Halveringstiden, det vill säga den tid det tar för hälften av atomkärnorna att sönderfalla, är $4{,}5 \cdot 10^9$ år för Uran-238.

b) Bestäm stjärnans ålder.

Uppgift 4. Trigonometriska ekvationer

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos 2x = 0$

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $(\sin 5x - 0{,}4) \cdot \cos 2x = 0$