Delprov B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11-19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 62 poäng varav 22 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 32 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Ange ett komplext tal z på formen $z = a + b\text{i}$ så att

a) $\text{Im}\, z = 4$ _____ (1/0/0)

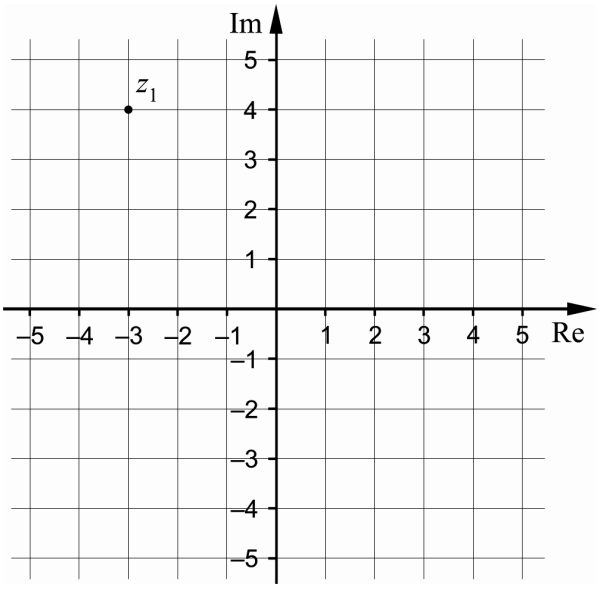
b) $\arg z = 45°$ _____ (1/0/0)

2. Derivera

a) $f(x) = \cos 5x$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = x \cdot \text{e}^x$ _____ (1/0/0)

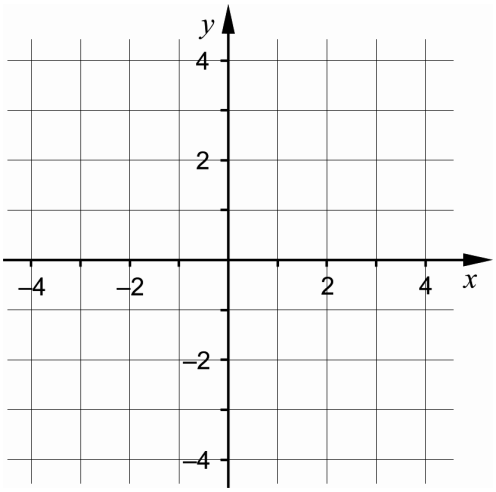
3. Figuren nedan visar ett komplext talplan där talet z_1 är markerat.



a) Beräkna $|z_1|$ _____ (1/0/0)

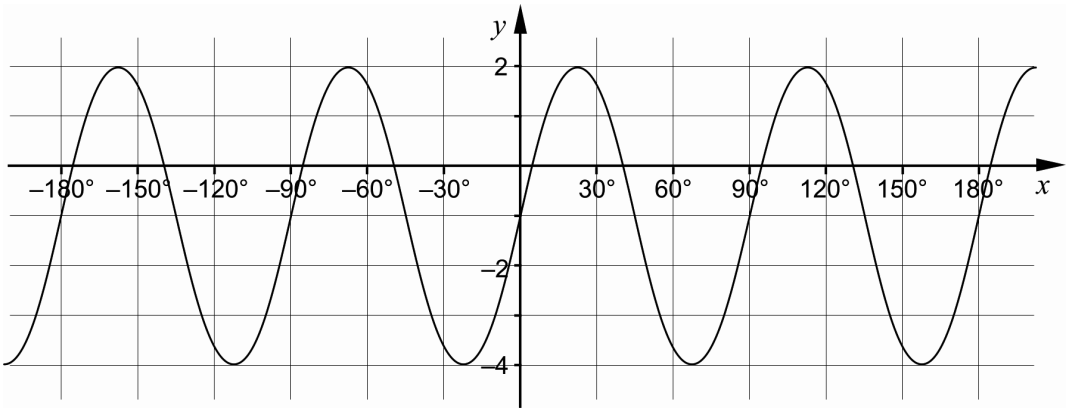
b) Markera talet $\bar{z}_2$ i det komplexa talplanet ovan då $z_2 = -5 - \text{i}$ (1/0/0)

4. a) Använd koordinatsystemet nedan och markera ett område vars area kan beräknas med $\int_{-1}^{1}(3+x)\,dx$ (1/0/0)



b) Bestäm värdet av $\int_{-1}^{1}(3+x)\,dx$ _____ (1/0/0)

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = A\sin kx + B$



Bestäm konstanterna A, B och k

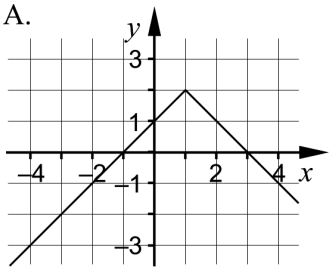
$A =$ _____

$B =$ _____

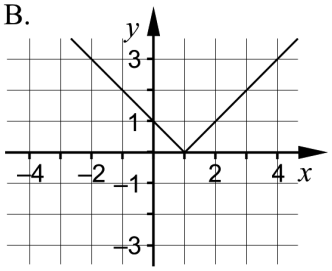
$k =$ _____ (1/1/0)

6. Ange vilken av följande figurer A-H som visar grafen till funktionen $f(x) = 2 - |x - 1|$

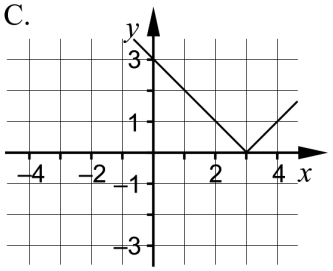
A.



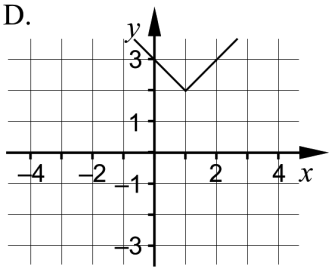
B.



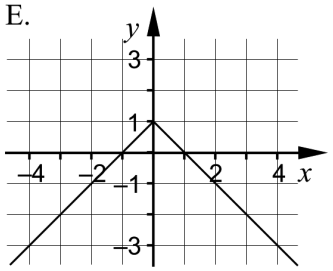
C.



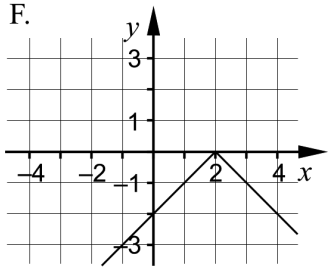
D.



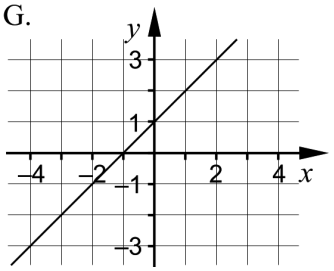
E.



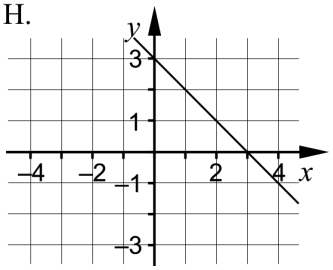
F.



G.



H.

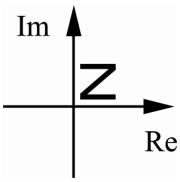


_____ (0/1/0)

7. Bestäm $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ då $f(x) = 2x + \sin x$

_____ (0/0/1)

8. En mängd komplexa tal som tillsammans formar bokstaven Z är markerade i det komplexa talplanet.

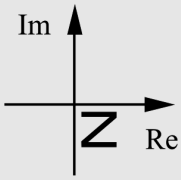


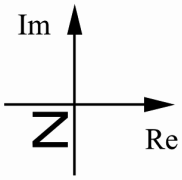
a) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas av konjugaten till de tal som formar Z i figuren ovan?

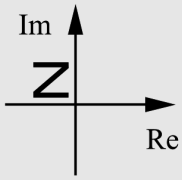
_____ (0/1/0)

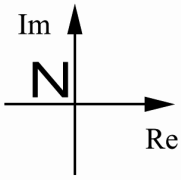
b) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas då de tal som formar Z i ursprungsfiguren ovan multipliceras med i?

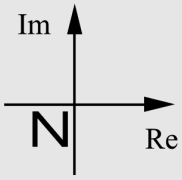
_____ (0/0/1)

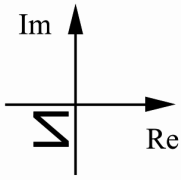
A.


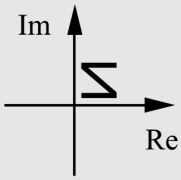
B.


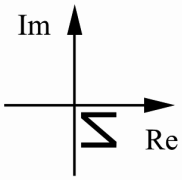
C.


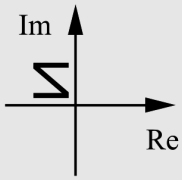
D.


E.


F.


G.


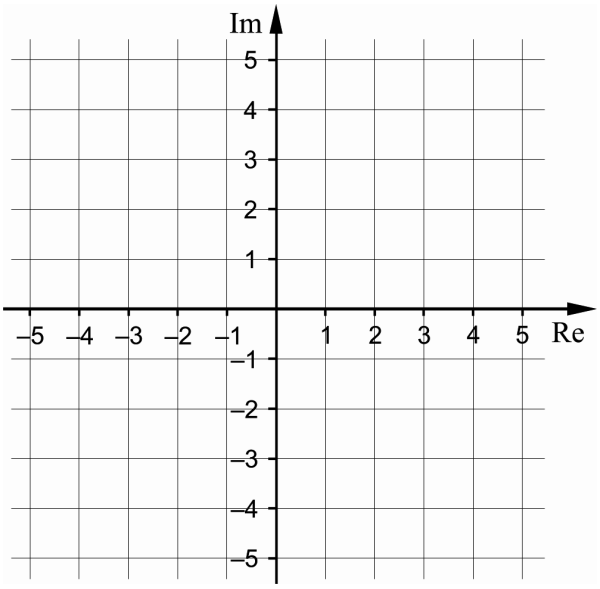
H.


I.


9. Ange en funktion f som har derivatan $f'(x) = x^2 \cdot e^{x^3+5}$

_____ (0/0/1)

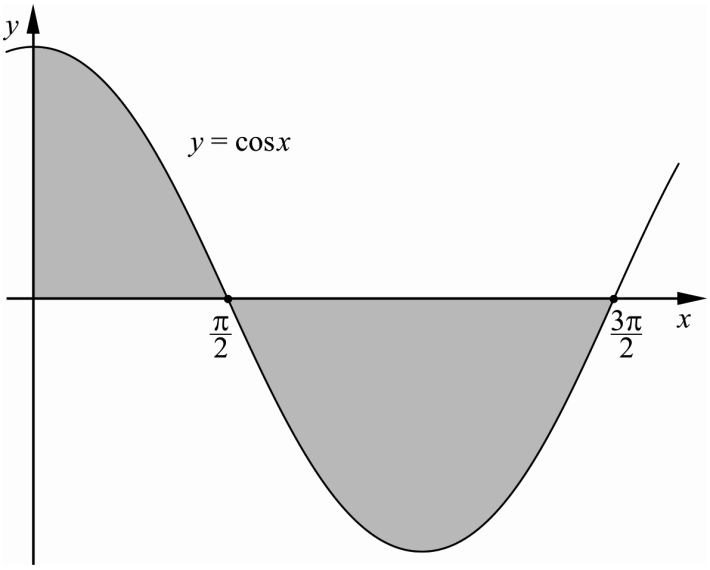
10. Markera i det komplexa talplanet de komplexa tal z för vilka det gäller att $|z-4| = |z-2i|$



(0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Beräkna den sammanlagda arean av de skuggade områdena i figuren nedan.



(2/0/0)

12. Visa att $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \sin^2 51° + \cos^2 51°$ (2/0/0)

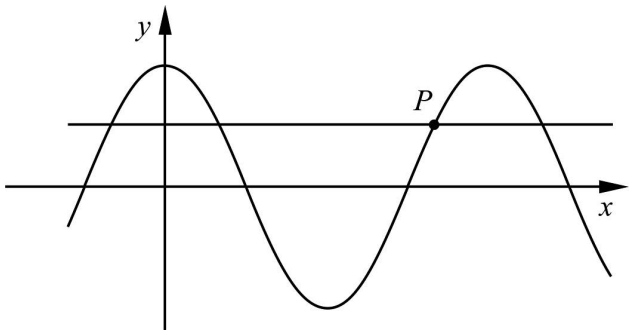
13. Bestäm det komplexa talet $z = a + b\text{i}$ så att $\bar{z} + 3z = \text{i}z + 9$ (1/1/0)

14. Ekvationen $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$ är given.

a) Visa att $x = 2$ är en rot till ekvationen. (1/0/0)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (0/2/0)

15. Figuren nedan visar kurvan $y = \cos 2x$ och linjen $y = \frac{1}{2}$



Bestäm x-koordinaten för skärningspunkten P (1/2/0)

16. Lös ekvationen $z^3 + 27\mathrm{i} = 0$ (0/3/0)

17. För de komplexa talen z_1 och z_2 gäller att $z_2 = z_1 \cdot (1 - \mathrm{i})$ och att z_1 ligger i området $45° < \arg z_1 < 135°$ i det komplexa talplanet.

Bestäm i vilket område i det komplexa talplanet talet z_2 ligger. (0/1/1)

18. Beräkna $\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x$ då $f(x) = \sin(\pi x^2)$ (0/1/2)

19. Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ saknar maximi- och minimipunkter om $a \geq 3$ (0/1/3)

Delprov D	Uppgift 20-27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 62 poäng varav 22 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 32 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

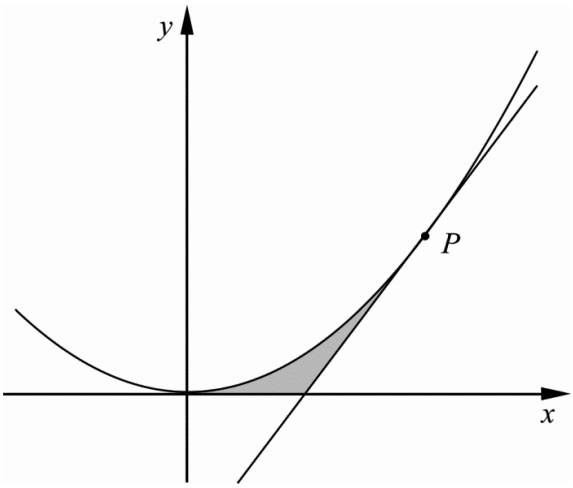
Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Under ett dygn i juli mättes temperaturen i Haparanda. Enligt en förenklad modell kan temperaturen under detta dygn beskrivas med sambandet
$y = 15 + 5\sin(0{,}26x)$
där y °C är temperaturen och x är antalet timmar efter klockan 08.00.

Bestäm förändringshastigheten för temperaturen när klockan är 12.00. (2/0/0)

21. Bestäm talet a så att $y = a \cdot \mathrm{e}^{2x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ (2/0/0)

22. Figuren nedan visar parabeln $f(x) = x^2$ och linjen $g(x) = 4x - 4$
Linjen tangerar parabeln i punkten P. Parabeln och linjen innesluter tillsammans med x-axeln ett område som skuggats i figuren.



Bestäm arean av det skuggade området. (2/1/0)

23. Ange en funktion som har två lodräta asymptoter. *Endast svar krävs* (0/2/0)

24. Som ett led i ett bageris kvalitetskontroll vägs ett antal bakade kanelsnäckor. Kvalitetskontrollen visar att vikten är normalfördelad med medelvikten 120 gram och standardavvikelsen 4,0 gram.

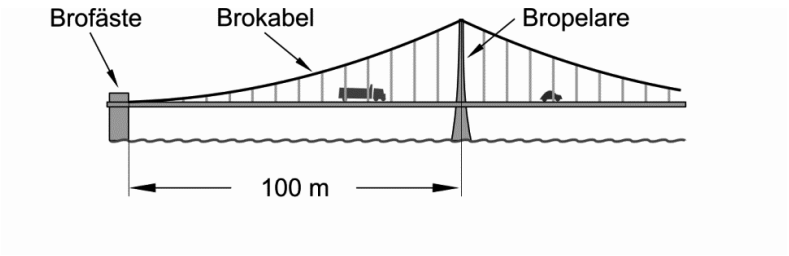
Hur många kanelsnäckor kan förväntas väga mellan 115 gram och 130 gram om man en dag bakar 450 kanelsnäckor? (0/2/0)

25. Enligt en förenklad modell kan formen av brokabeln i figuren nedan beskrivas med funktionen

$f(x) = 0{,}040x^{3/2}$ i intervallet $0 \le x \le 100$, där

f är höjden över vägbanan i meter och

x är avståndet i meter längs vägbanan mätt från brofästet.



Faktaruta:

Längden s av en kurva $y = f(x)$ i intervallet $a \le x \le b$ ges av sambandet

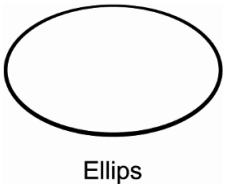
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Bestäm längden av brokabeln mellan brofästet och bropelaren. (0/2/0)

26. Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i origo och med radien 1 är
$x^2 + y^2 = 1$

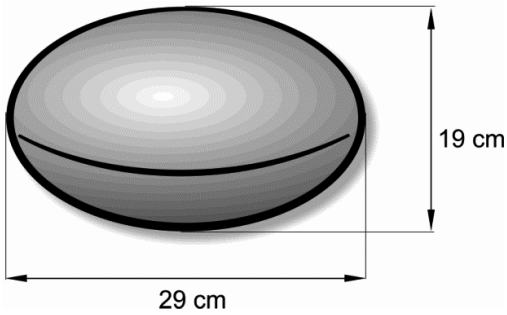
Ekvationen för en ellips med medelpunkt i origo och som skär axlarna i $(\pm a, 0)$ och $(0, \pm b)$ är på motsvarande sätt

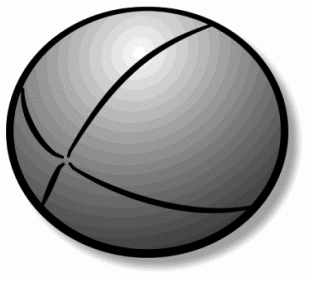
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$


Ellips

När en sådan ellips roterar runt x-axeln får man en ellipsoid.
I rugby används en boll som har formen av en ellipsoid.

En typ av boll som är godkänd för rugbymatcher har de mått som anges i figuren nedan.



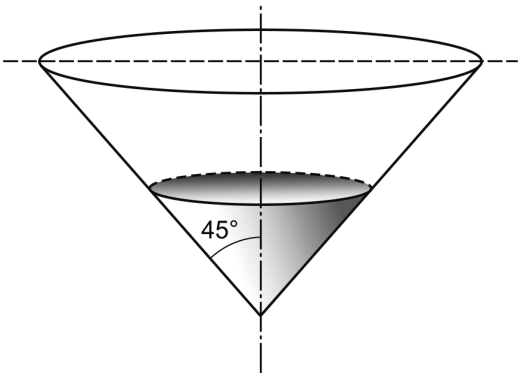


Bestäm volymen av denna boll. (0/0/3)

27. Lasse och Marcus ska lösa följande uppgift:

En behållare har formen av en kon som figuren visar. Behållaren är tom från början. Vatten tillförs med hastigheten $(25 + 0{,}2t)$ liter/min, där t är tiden i minuter från påfyllningens start.

Med vilken hastighet stiger behållarens vattennivå då den är 7,0 dm?



Lasse räknar först ut att det tar 13,6 minuter för vattennivån att bli 7,0 dm.

Marcus ska använda Lasses resultat för att lösa resten av uppgiften.
Marcus börjar med att beteckna vattennivån med h och bestämmer volymen i behållaren uttryckt i h. Sedan beräknar han den efterfrågade hastigheten.

a) Utgå från Lasses resultat och genomför Marcus del av lösningen. (0/1/1)

b) Visa att Lasse har räknat rätt, det vill säga att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm. (0/1/2)