Delprov B	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 24 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

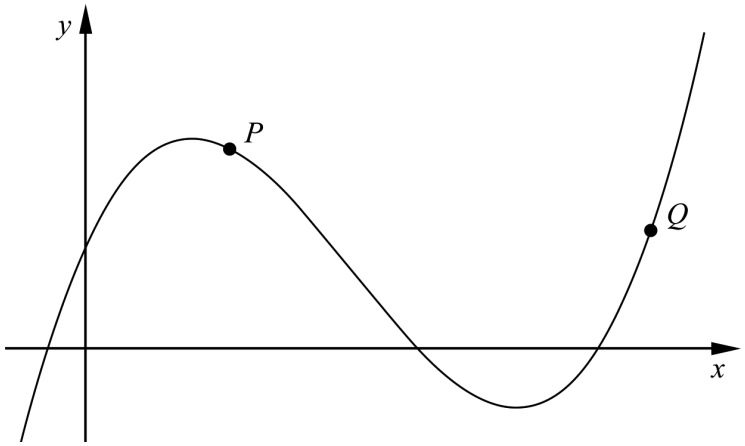
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. För funktionen f gäller att $f(x) = 3x^4 - 12x$
Bestäm $f'(x)$ _____ (1/0/0)

2. I figuren visas grafen till en tredjegradsfunktion.

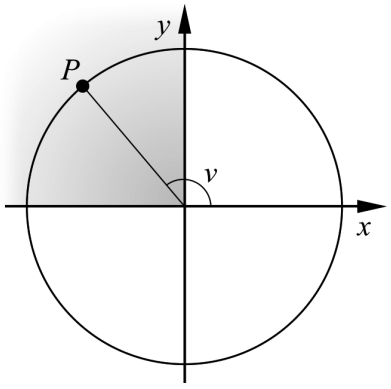


Rita i figuren

a) en tangent till kurvan i punkten P. (1/0/0)

b) en sekant som går genom punkten Q. (1/0/0)

3. Punkten P ligger i andra kvadranten på enhetscirkeln, se figur.



Hur stor är vinkeln v om P har y-koordinaten $\frac{\sqrt{3}}{2}$? _____ (1/0/0)

4. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{5}}$ _____ (1/0/0)

b) $\dfrac{a}{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}}$ _____ (0/1/0)

5. Det radioaktiva ämnet polonium-210 sönderfaller till bly-206. Vid sönderfallet bildas även helium-4. I ett visst preparat kan massan som finns kvar av polonium-210 beskrivas med sambandet $m(t) = 2\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}$ där m är massan av polonium-210 i µg och t är tiden i dygn räknat från mätningens början.

Vilket av alternativen A-H nedan anger förändringshastigheten för massan polonium-210 vid tiden 1000 dygn?

A. $-2\,000\,\mathrm{e}^{-5}$ µg

B. $-2\,000\,\mathrm{e}^{-5}$ µg/dygn

C. $2\,000\,\mathrm{e}^{-5}$ µg

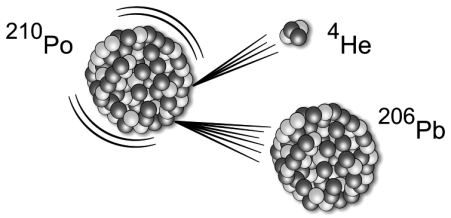
D. $2\,000\,\mathrm{e}^{-5}$ µg/dygn

E. $-10\,\mathrm{e}^{-5}$ µg

F. $-10\,\mathrm{e}^{-5}$ µg/dygn

G. $10\,\mathrm{e}^{-5}$ µg

H. $10\,\mathrm{e}^{-5}$ µg/dygn _____ (0/1/0)



6. Lös ekvationen $|x+2| = 5$ _____ (0/1/0)

7. För en funktion f gäller att $y = f(x)$. Grafen till funktionen har en tangent i den punkt där $x = 5$. Tangentens ekvation är $3x + 2y - 10 = 0$

a) Bestäm $f'(5)$ _____ (0/1/0)

b) Bestäm $f(5)$ _____ (0/1/0)

8. Mobiltelefonabonnemanget RingUpp har en fast månadsavgift på 49 kr och en öppningsavgift på 69 öre per samtal. Inga andra avgifter tillkommer.

Antag att du ringer x samtal under en viss månad.
Den totala kostnaden i kr under denna månad är då $0{,}69x + 49$

a) Skriv ett uttryck för kostnaden per samtal under månaden.

_____ (0/1/0)

b) Kostnaden per samtal under en månad närmar sig en undre gräns då antalet samtal ökar. Ange denna gräns. Svara i kronor.

_____ (0/0/1)

9. Grafen till funktionen f är en rät linje. Funktionen f har nollstället $x = 3$

Det finns flera värden på konstanterna a och b så att $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ där $a < b$

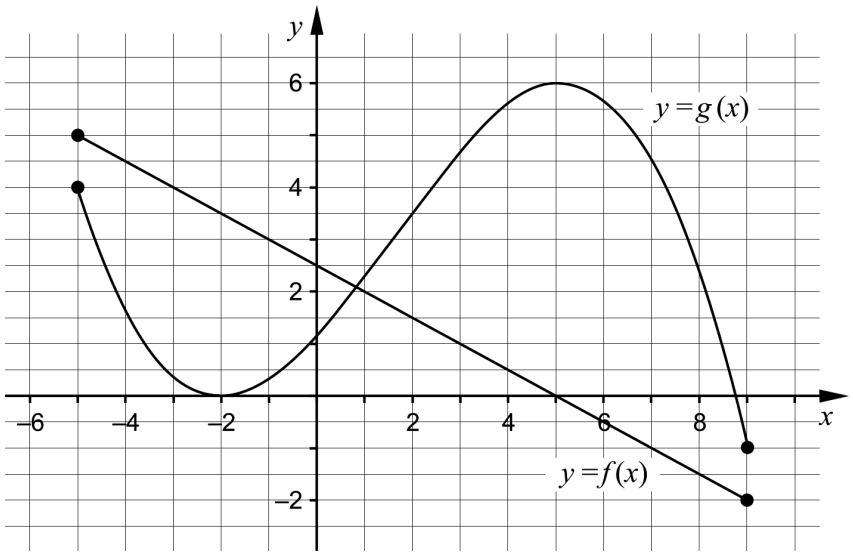
Ge ett exempel på möjliga värden på a och b som uppfyller villkoren ovan.

$a =$ _____ $b =$ _____ (0/1/0)

10. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a}{2 + \dfrac{4}{x}} = 5$

_____ (0/1/0)

11. Figuren visar graferna till funktionerna f och g som är definierade i intervallet $-5 \le x \le 9$
Funktionen h bildas som summan av f och g, det vill säga $h(x) = f(x) + g(x)$.



Använd graferna för att lösa följande uppgifter.

a) Bestäm $h(2)$ _____ (0/1/0)

b) Bestäm största värdet för funktionen h i intervallet $-5 \le x \le 9$ _____ (0/0/1)

c) Bestäm $h'(5)$ _____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. En sten släpps från hög höjd. Stenens hastighet kan beskrivas med sambandet $v(t) = 10t$ där v är stenens hastighet i m/s och t är tiden i s efter att stenen släpps.

a) Beräkna $\int_1^2 10t \, \mathrm{d}t$ algebraiskt. (2/0/0)

b) Beskriv med ord vad integralens värde betyder i detta sammanhang. (1/1/0)

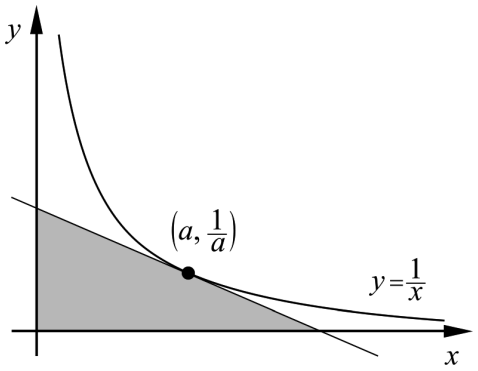
13. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 12x$
Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, en minimi- eller en terrasspunkt. (3/1/0)

14. Lös ekvationen $\frac{1}{x(1-x)} = 1 + \frac{1}{1-x}$ (0/3/0)

15. Bestäm en andragradsfunktion f som uppfyller villkoret att $f'(3) = 2$ (0/2/0)

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ har arean 2 areaenheter *oavsett* var tangenten tangerar kurvan. Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ (0/1/3)



Delprov D	Uppgift 17-26. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 24 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

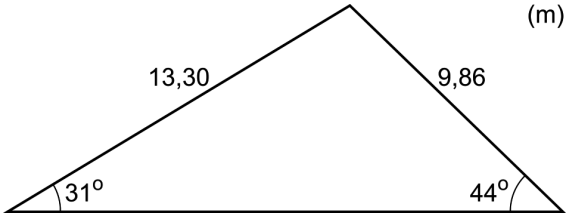
Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Beräkna längden av triangelns tredje sida.



(2/0/0)

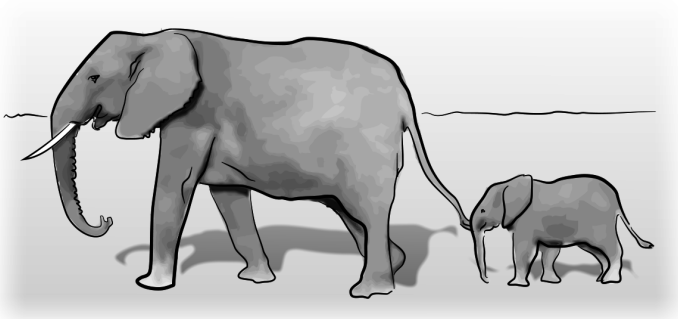
18. Kalle säger:

- Det finns bara en primitiv funktion till $f(x) = \mathrm{e}^x$

Har Kalle rätt? Motivera. (1/0/0)

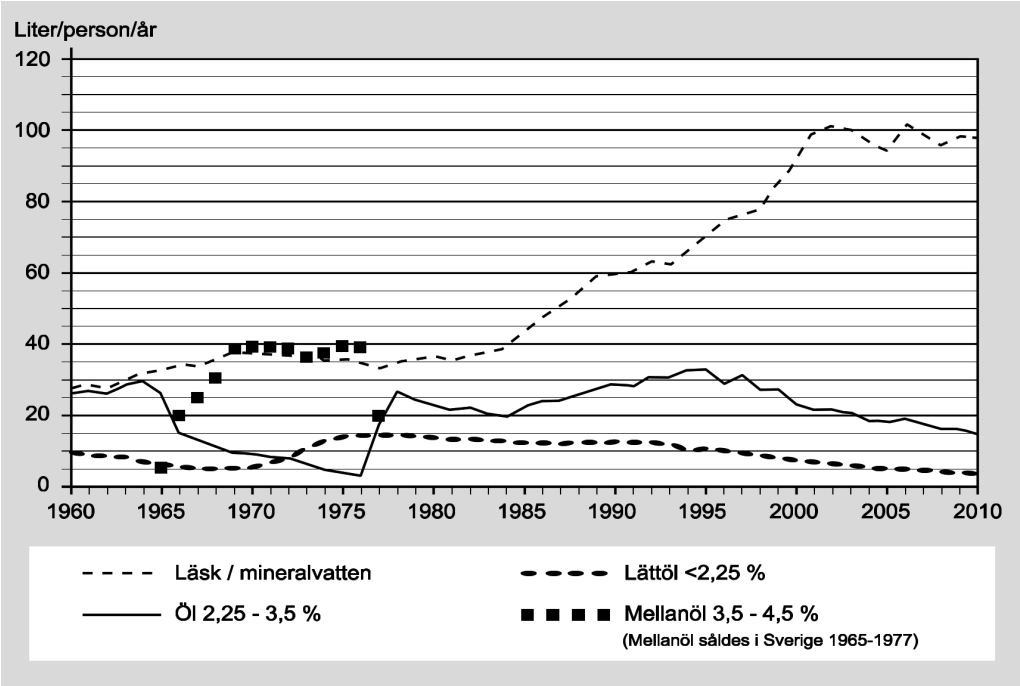
19. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 15x^2$ och $g(x) = x^3 - 33x$
Bestäm de värden på x där funktionernas grafer har samma lutning. (2/0/0)

20. Ett elefantfosters vikt ges av sambandet $V(t) = 0{,}310 \cdot \mathrm{e}^{0{,}271 \cdot t}$ där $t \geq 1$
V är elefantfostrets vikt i kg och t är tiden i månader efter befruktningen.
När elefantungen föds väger den 120 kg.



Hur lång tid efter befruktningen föds elefantungen? (2/0/0)

21. I diagrammet nedan visas hur konsumtionen av läsk/mineralvatten samt öl har förändrats i Sverige sedan år 1960.

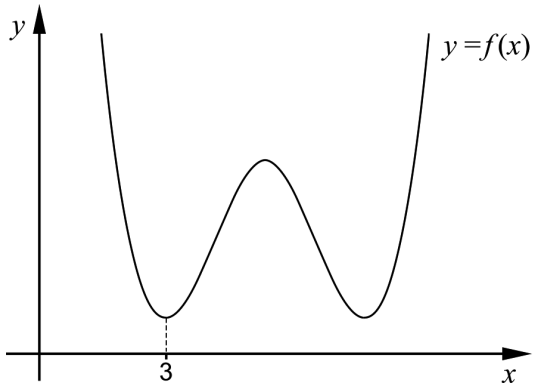


a) Bestäm den genomsnittliga förändringshastigheten i (liter/person/år)/år för konsumtionen av läsk/mineralvatten under tidsperioden 1960-2010. (2/0/0)

Den genomsnittliga förändringshastigheten för konsumtionen av mellanöl under tidsperioden 1966-1977 är 0 (liter/person/år)/år.

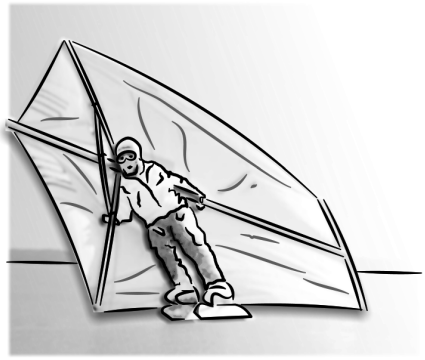
b) Förklara varför den genomsnittliga förändringshastigheten inte är ett lämpligt mått för att beskriva hur konsumtionen av mellanöl förändrats under tidsperioden 1966-1977. (0/0/1)

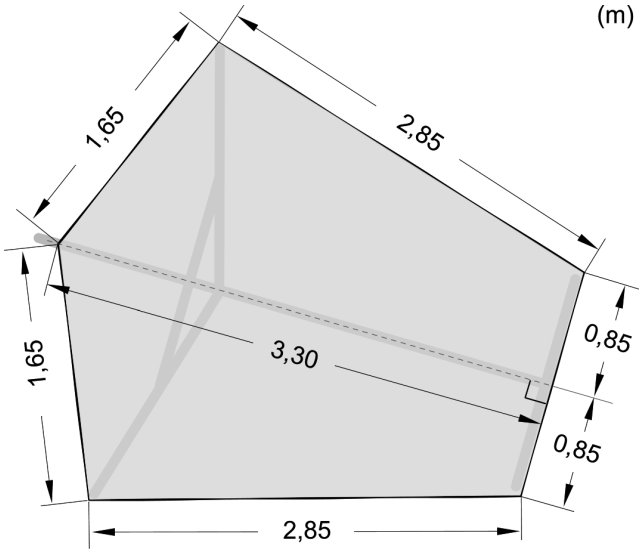
22. Figuren visar grafen till fjärdegradsfunktionen f. En av minimipunkterna har x-koordinaten 3



Förklara med hjälp av grafens utseende varför summan $f(3) + f'(3) + f''(3)$ är större än noll. (1/1/0)

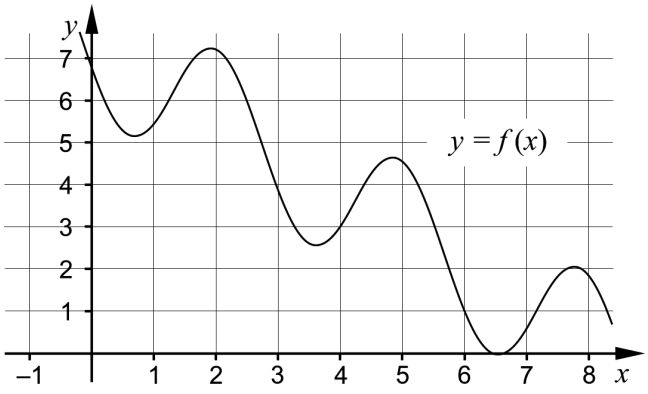
23. Olle brukar ägna sig åt skridskosegling på Kågefjärden utanför Skellefteå. Hans segel har mått enligt figuren.



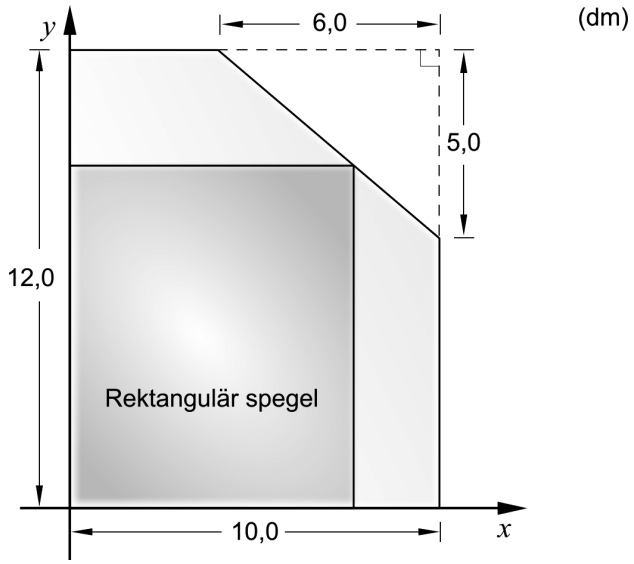


Beräkna seglets area. (0/4/0)

24. Figuren visar grafen till funktionen f. Beräkna $\int_4^6 f'(x)\mathrm{d}x$ (0/0/2)



25. En glasmästare har av misstag skurit av ett hörn på ett rektangulärt spegelglas som hade måtten 12,0 dm × 10,0 dm. Den avskurna biten har formen av en rätvinklig triangel där de vinkelräta sidorna är 6,0 dm respektive 5,0 dm. Se figur.



Glasmästaren vill använda det kvarvarande spegelglaset till en rektangulär spegel som har sitt ena hörn på den avskurna kanten. Glasmästaren vill också att spegeln ska få så stor area som möjligt.

Beräkna det mått på bredden som ger spegelns största area. (0/0/4)

26. En cirkel tangerar de positiva koordinataxlarna. Punkten (5, 7) ligger på cirkelns rand.

Bestäm cirkelns radie exakt. (0/0/3)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

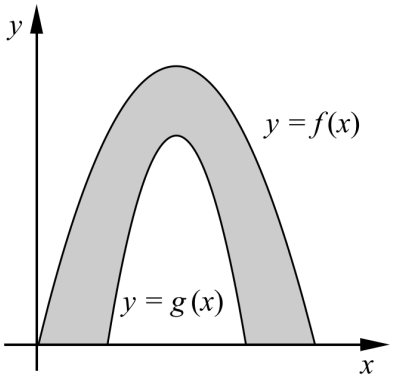
Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Formen av en valvbåge kan beskrivas av det område som begränsas av graferna till funktionerna f och g samt x-axeln (se figur). För funktionerna gäller att $f(x) = -x^2 + 4x$ och $g(x) = -3x^2 + 12x - 9$



Beräkna valvbågens area om 1 längdenhet motsvarar 1 meter.

Uppgift 2.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För två olika trianglar gäller att en vinkel är $42°$ och den motstående sidan har längden 29 cm. Båda trianglarna har dessutom en sida med längden 38 cm.

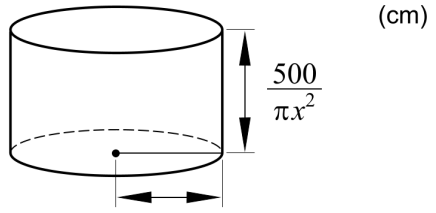
Beräkna de övriga vinklarna och längden av den tredje sidan i var och en av trianglarna.

Uppgift 3.

Namn:_____

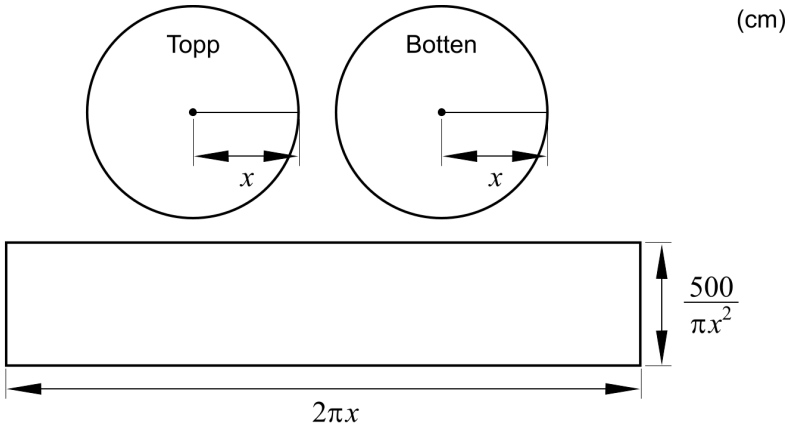
Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Cylindriska konservburkar som har volymen 500 cm^3 kan se ut på många olika sätt. Om radien är x cm så blir höjden $\frac{500}{\pi x^2}$ cm (se Figur 1).



Figur 1

En sådan konservburk tillverkas av tre plåtbitar (se Figur 2).



Figur 2

Bestäm konservburkens radie så att den sammanlagda arean av plåtbitarna blir så liten som möjligt.

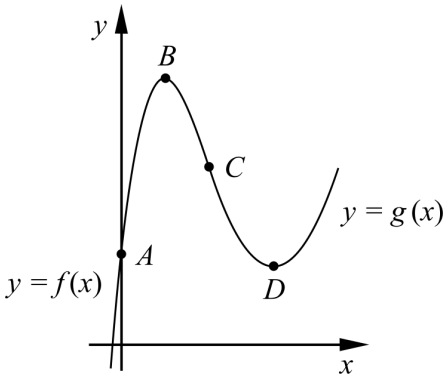
Uppgift 4.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I figuren visas en kurva som är sammansatt av två kurvor. Den första kurvan, som går genom A och B och sedan till C, ges av $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Den andra kurvan, som går från C och sedan genom D, ges av $g(x) = x^2 - 7x + 14$



I den gemensamma punkten C har båda kurvorna lutningen -3. B är en maximipunkt och D är en minimipunkt.

Bestäm koordinaterna för punkterna A, B, C och D.