Del B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 11-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 29 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 38 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där *”Endast svar krävs”* behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

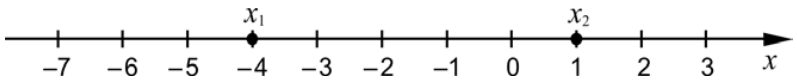
Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. På tallinjen är två tal x_1 och x_2 markerade.



Bestäm $|x_1 - x_2|$ _____ (1/0/0)

2. För vilket värde på *x* är uttrycket $\frac{3x-21}{6-x}$ *inte* definierat?

_____ (1/0/0)

3. Vilket av alternativen A-E visar ett polynom?

A. $\frac{4}{x^3} + 4x^3$

B. $x^2 + x^{2,5}$

C. $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3$

D. $4x^3 + 2x^2$

E. $\frac{5x}{12x - x^2}$ _____ (1/0/0)

4. För vilka vinklar *v* i intervallet $0° \le v < 360°$ gäller att $\sin v = \frac{1}{2}$?

_____ (1/0/0)

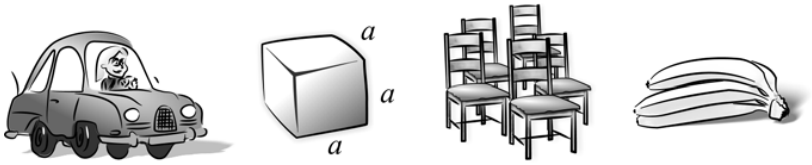
5. Derivera

a) $f(x) = 3x^4 + 6x + 10$ _____ (1/0/0)

b) $f(x) = e^x + ex$ _____ (0/1/0)

c) $f(x) = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2}$ _____ (0/1/0)

6. Nedan ges några olika situationer som kan beskrivas med en funktion.
Vilket av alternativen A-D beskrivs bäst med en diskret funktion?



A. Bensinförbrukningen hos en bil beror av hur långt bilen körs.

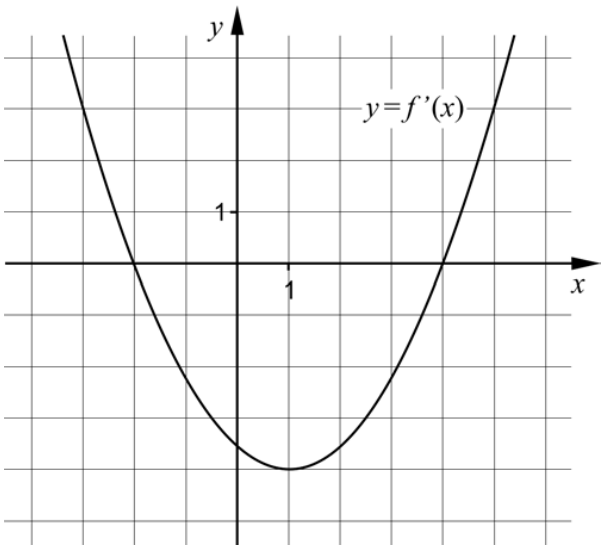
B. Volymen av en kub beror av sidans längd.

C. Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.

D. Kostnaden för bananer beror av vikten på bananerna.

_____ (0/1/0)

7. Figuren nedan visar grafen till derivatan f' för en tredjegradsfunktion f.



a) För vilket värde på x har grafen till f en minimipunkt?

_____ (0/1/0)

b) För vilka värden på x är f avtagande? _____ (0/2/0)

8. Ange *alla* funktioner som har egenskapen att $f(x) = f'(x)$ där $f(x) \neq 0$

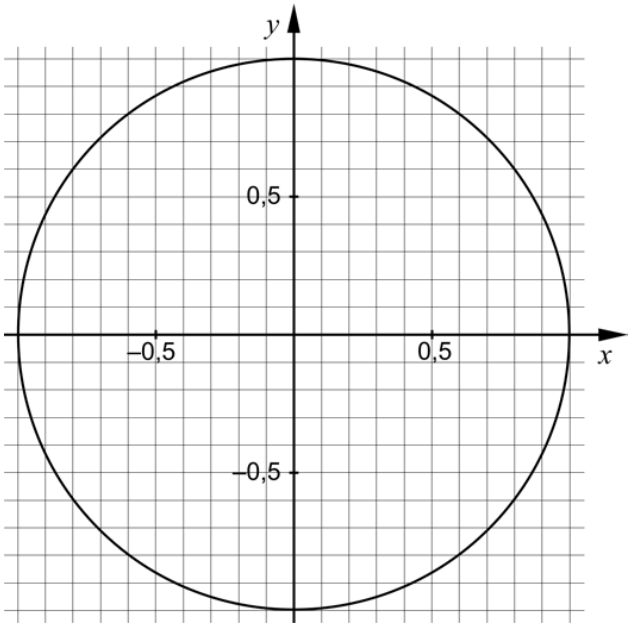
_____ (0/1/1)

9. Bestäm

a) $\lim_{x \to 0} (e^x + 7)$ _____ (1/0/0)

b) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{16x}{4x+9}}$ _____ (0/0/1)

10. Använd enhetscirkeln nedan och bestäm $\cos(180° - v)$ om $\sin v = 0{,}8$



_____ (0/0/2)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Beräkna $\int_1^2 6x^2 \, dx$ algebraiskt. (2/0/0)

12. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 3x^2$
Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/0/0)

13. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 5x^2 + 3x$ och $g(x) = x^2 + 8x$

a) Bestäm det värde på x där grafen till f har lutningen 18 (2/0/0)

b) Grafen till g har en tangent i den punkt där $x = 6$
Bestäm koordinaterna för tangentens skärningspunkt med x-axeln. (0/3/0)

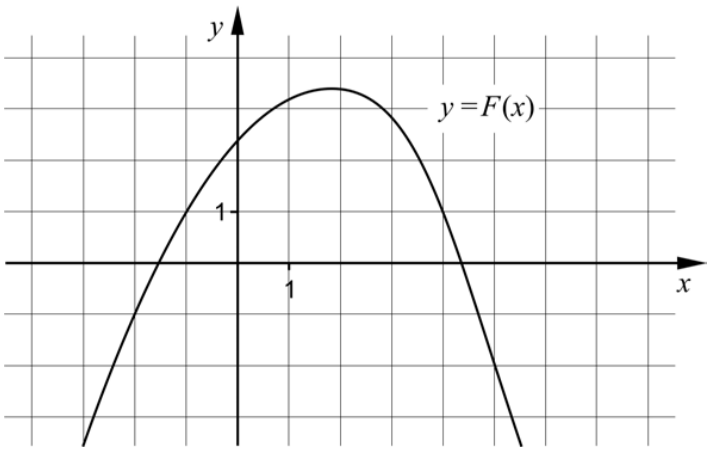
14. Förenkla så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{2x-6}$ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2-32}$ (0/2/0)

15. F är en primitiv funktion till funktionen f.

I figuren visas grafen till funktionen F. Bestäm $\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ (0/0/1)



16. Bestäm derivatan till $f(x) = \frac{A}{x}$ med hjälp av derivatans definition. (0/2/2)

Del D	Uppgift 17-25. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 29 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 38 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där *”Endast svar krävs”* behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

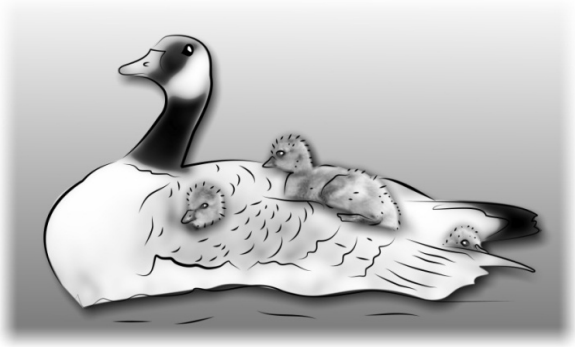
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

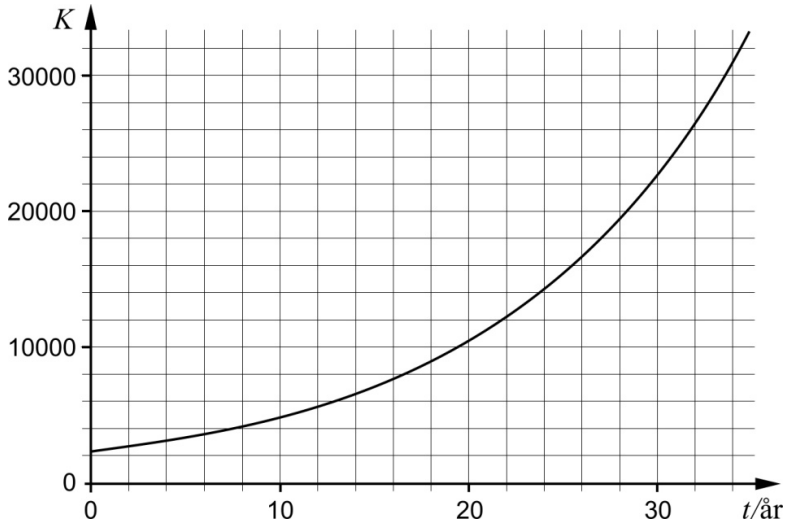
17. Bestäm det värde på x där derivatan till $f(x) = x^2 + 5x$ är lika med derivatan till $g(x) = -5x^2 + 14x$ (2/0/0)

18.



Kanadagåsen infördes till Sverige på 1930-talet. Därefter har populationen ökat. Vid samma tidpunkt varje år görs en inventering av antalet kanadagäss. Populationens tillväxt kan beskrivas med en exponentiell modell.

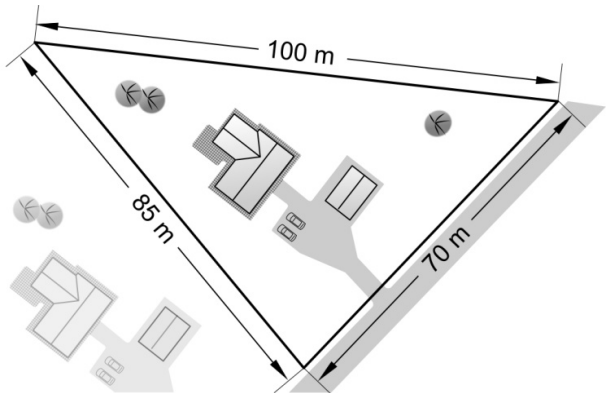
Diagrammet nedan visar antalet kanadagäss K som funktion av tiden t år, där $t = 0$ motsvarar år 1977.



a) Bestäm ett närmevärde till $K'(30)$ med hjälp av grafen. (1/0/0)

b) Ge en tolkning av vad $K'(20) = 800$ betyder för antalet kanadagäss i detta sammanhang. (0/1/0)

19. I figuren visas en tomt som har sidlängderna 100 m, 70 m och 85 m.
Beräkna tomtens area. (2/1/0)



20. En cirkel har ekvationen $x^2 - 2x + y^2 - y = 0{,}5$

a) Ligger punkten $(1,\ 2)$ på cirkeln? Motivera ditt svar. (2/0/0)

b) Cirkeln har sin medelpunkt i (1; 0,5). Bestäm cirkelns area. (0/3/0)

21. Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.

a) $F(x) = 3e^x$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{3x}$ (1/0/0)

b) Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställen om konstanten $a \leq 0$ (0/2/1)

22. Karolina häller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$T(t) = 95e^{-0{,}039t}$

där T är kaffets temperatur i °C och t är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)

b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)

c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

23.



Tartaglia (1500-1557)

Italienaren Tartaglia var en matematiker som levde på 1500-talet. Han anses ha formulerat följande matematiska problem, här återgivet i modern översättning:

Summan av två positiva tal är 8. Bestäm talen så att produkten av talens differens och talens produkt blir så stor som möjligt.

Din uppgift är att lösa Tartaglias matematiska problem. (0/0/3)

24. För tredjegradsfunktionen f gäller att

- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Bestäm $f'(6)$ (0/0/3)

25. När Mario föds bestämmer sig hans mormor för att spara pengar åt honom i en burk. Mormor tänker lägga ett belopp som motsvarar kvadraten av Marios ålder multiplicerat med 100, varje gång han fyller år. Marios farbröder Sergio och Riccardo funderar över hur mycket pengar mormor kommer att ha i burken på Marios 6-årsdag.

Sergio säger: *Man får reda på hur mycket pengar som finns i burken genom att beräkna integralen* $\int_0^6 100x^2 \mathrm{d}x$

Riccardo funderar ett tag och svarar: *Nej, den ger ett för litet värde.*

Förklara varför integralen ovan ger ett för litet värde om man använder den för att räkna ut hur mycket pengar det finns i burken på Marios 6-årsdag. (0/1/3)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet
Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater och din lärare när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

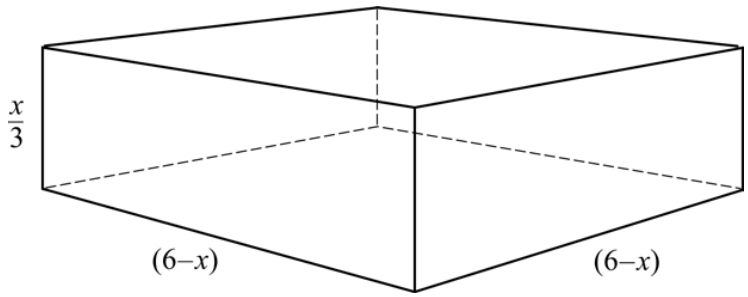
Uppgift 1. Rätblockets maximala volym

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren nedan visar ett rätblock med sidorna $\frac{x}{3}$, $(6-x)$ och $(6-x)$ l.e.

Använd derivata och beräkna rätblockets största möjliga volym.



Uppgift 2. Derivatans värde

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$

a) Bestäm $f'(4)$ med hjälp av deriveringsregler.

b) Bestäm $f'(4)$ med hjälp av ändringskvot*.

c) Förklara, gärna med hjälp av en figur, varför du får olika svar i a)- och b)-uppgiften.

* *Kommentar:* Ändringskvot kallas även för förändringskvot eller differenskvot.

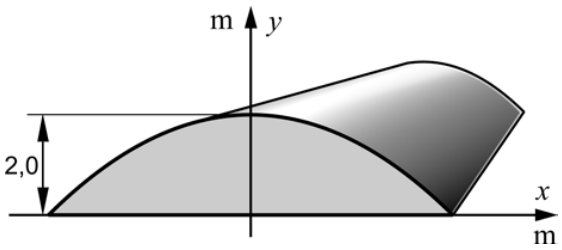
Uppgift 3. Jordvallen

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Intill en motorväg ska man anlägga en 2,0 m hög jordvall som bullerskydd. Jordvallens form kan beskrivas med en andragradskurva $y = 2{,}0 - 0{,}125x^2$

Beräkna hur många m^3 jord som kommer att behövas per kilometer jordvall.



Uppgift 4. Triangeln

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I triangeln ABC är sidan $a = 6{,}2\,\text{cm}$, sidan $b = 8{,}4\,\text{cm}$ och vinkeln $B = 65°$
Beräkna triangelns area.