Delprov B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

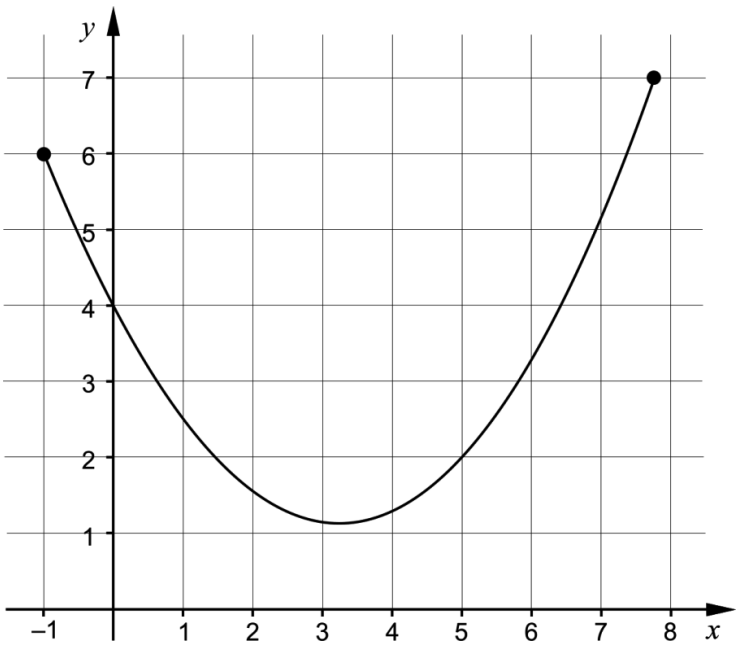
Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. För vilket värde på x är uttrycket $\dfrac{2x}{x+4}$ inte definierat?

_____ (1/0/0)

2. Beräkna det exakta värdet av $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$ _____ (1/0/0)

3. Figuren visar grafen till en funktion som är definierad i ett slutet intervall.



Rita i figuren

a) en tangent som har lutningen 1. Märk tangenten med bokstaven T. (1/0/0)

b) en sekant som har lutningen 1. Märk sekanten med bokstaven S. (1/0/0)

4. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 10$ $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

b) $f(x) = \dfrac{3x + e^{-x}}{2}$ $f'(x) =$ _____ (0/1/0)

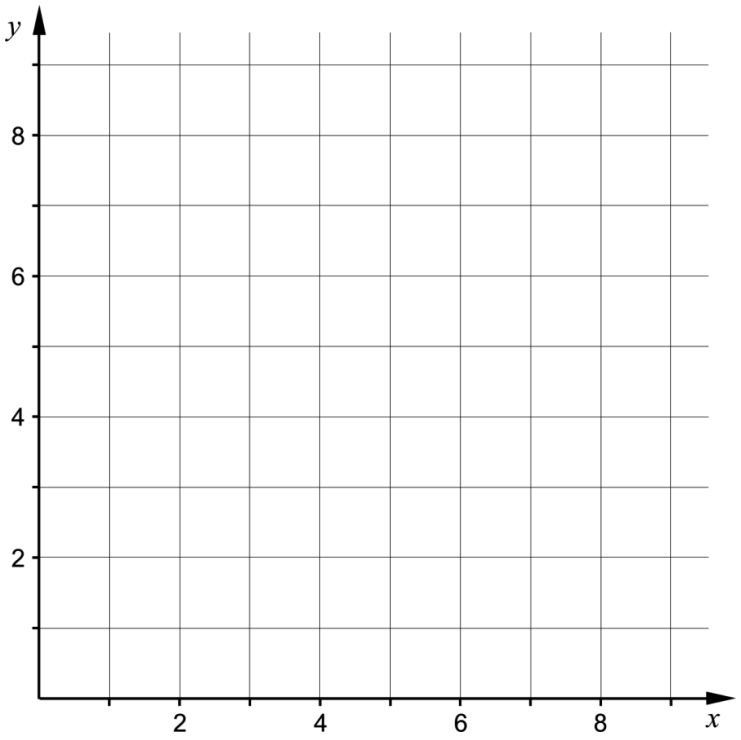
c) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $f'(x) =$ _____ (0/1/0)

5. $2 + 6 + 18 + ...$ är en geometrisk summa.

a) Bestäm den fjärde termen. _____ (1/0/0)

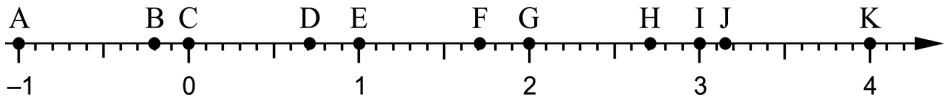
b) Bestäm den *n*:te termen. _____ (0/1/0)

6. Funktionen f är en *diskret* funktion.
Det gäller att $f(x) = x^2$ för $x = 1$, 2 och 3
Rita grafen till funktionen f i koordinatsystemet.



(1/0/0)

7. På tallinjen är punkterna A – K markerade.

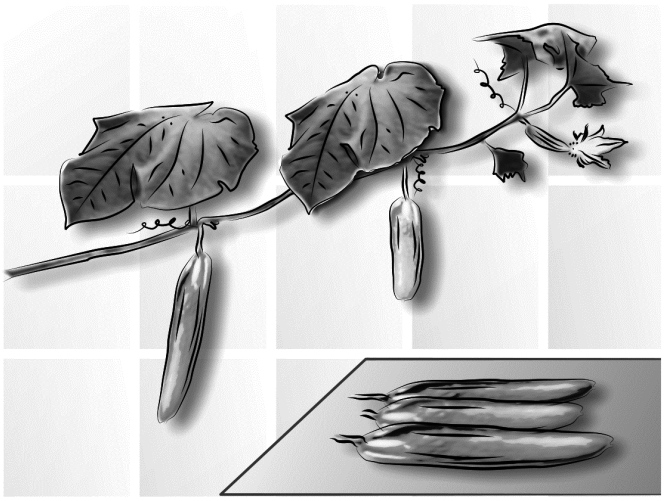


Bestäm vilken av punkterna A – K som motsvarar värdet av

a) $\ln e^2$ _____ (1/0/0)

b) $e - \ln 1$ _____ (0/1/0)

8. En gurkodlare har undersökt hur vikten hos en växande gurka ökar med tiden. Hon redovisar resultatet som en funktion $y = V(t)$, där $V(t)$ är gurkans vikt i hg och t är tiden i veckor efter mätningens början.



Vad får hon veta genom att bestämma $V'(3)$?
Välj ett av alternativen A – E.

A. Den vikt i hg som gurkan har vid tiden 3 veckor.

B. Gurkans viktökning i hg under 3 veckor.

C. Gurkans genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.

D. Den tid det tar för gurkans vikt att öka till 3 hg.

E. Gurkans viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

_____ (0/1/0)

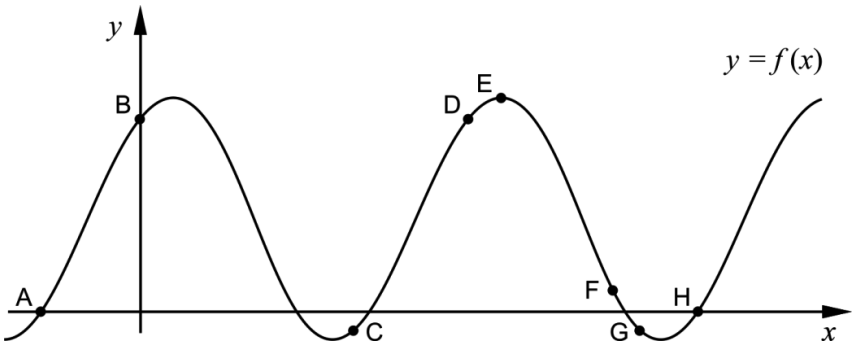
9. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{3x+15}{x+5}$ _____ (1/0/0)

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-18}$ _____ (0/1/0)

c) $\dfrac{(x-1)^{13}+(x-1)^{12}}{x}$ _____ (0/0/1)

10. Figuren visar grafen till en funktion f. På grafen är punkterna A – H markerade.



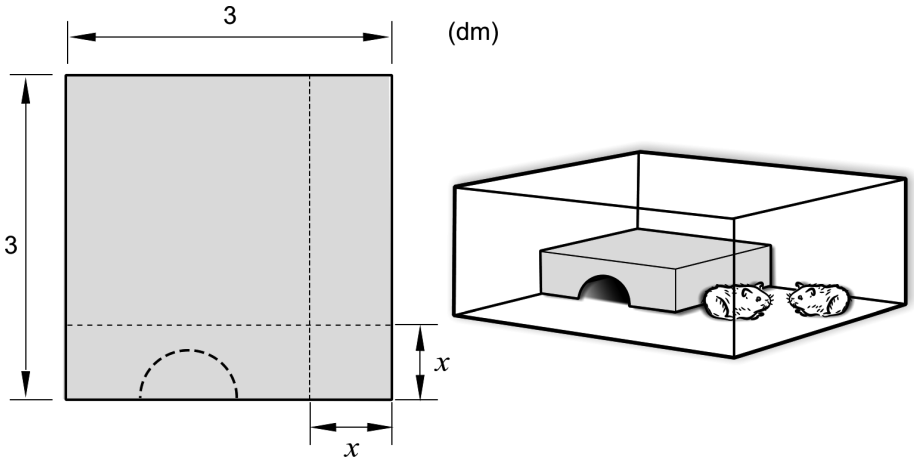
a) I en av punkterna A – H är $f'(x) > 0$ och $f(x) < 0$
Ange denna punkt. _____ (0/1/0)

b) I några av punkterna A – H är $f''(x) < 0$
Ange dessa punkter. _____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = x^3$ och $g(x) = 6x^2 - 9x$
Undersök om funktionernas grafer skär varandra i punkten $(2, 8)$. (2/0/0)

12. János har en kvadratisk plåt som han tänker använda för att bygga ett bo åt sina hamstrar. Han tänker skära bort en kvadratisk bit från ett av plåtens hörn och sedan vika plåten till ett bo, se figur.

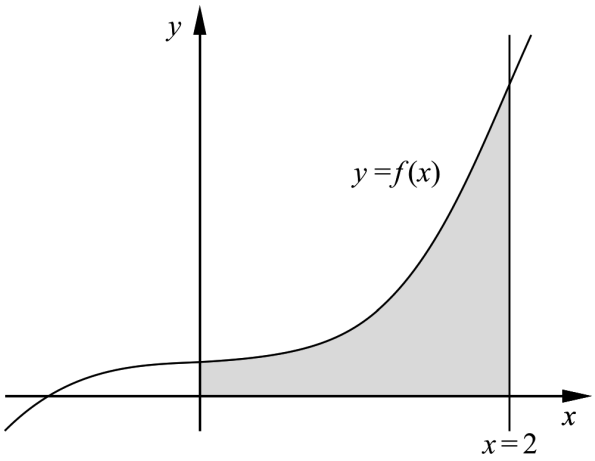


János antar att den kvadratiska biten har sidan x dm. Sedan bestämmer han boets volym V dm^3 som funktion av sidan x dm:

$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

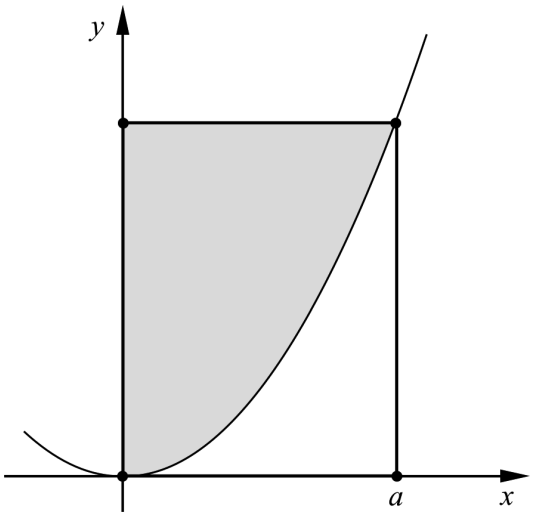
Använd derivata för att beräkna x så att boet får så stor volym som möjligt. (3/1/0)

13. Beräkna arean av området som begränsas av linjen $x = 2$, grafen till $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{4}$ och de positiva koordinataxlarna. (0/2/0)



14. Arkimedes var en grekisk matematiker och filosof som levde för ungefär 2300 år sedan. Han studerade bland annat parabler.

Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Rektangeln har hörn i origo, på parabeln och på de positiva koordinataxlarna. Parabeln delar rektangeln i ett grått område ovanför parabeln och ett vitt område under parabeln. Se figur.



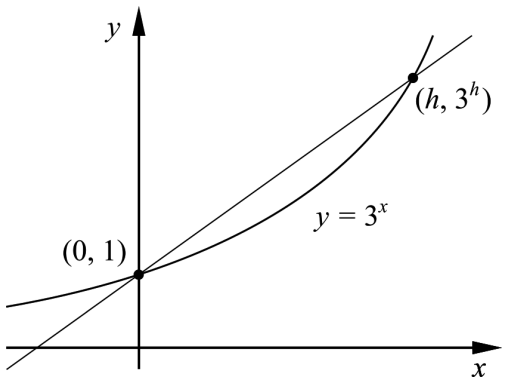
Arkimedes påstod att arean av det grå området är dubbelt så stor som arean av det vita området.

Utgå från att parabeln beskrivs med funktionen $y = kx^2$ där k är en positiv konstant och att hörnet på positiva x-axeln ligger i punkten där $x = a$.

Bevisa att Arkimedes påstående gäller för alla sådana parabler. (0/3/0)

15. Bestäm alla värden på a så att uttrycket $\dfrac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$ blir möjligt att förenkla. (0/0/2)

16. Figuren visar grafen till $y = 3^x$ och en rät linje som skär grafen i punkterna $(0, 1)$ och $(h, 3^h)$.



Bestäm $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h}$ och svara exakt. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 17-24. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

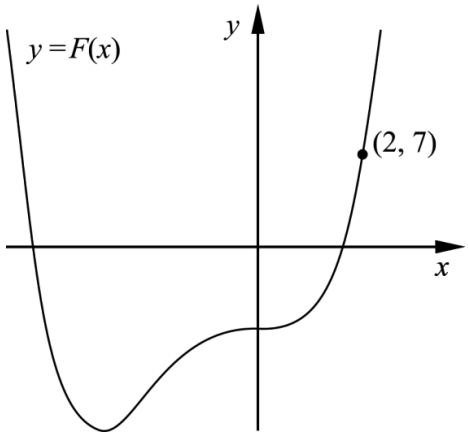
Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 + 3x^2$
F är en primitiv funktion till f. Grafen till F går genom punkten $(2, 7)$.
Se figur.



Bestäm den primitiva funktionen F. (2/0/0)

18. Lisa funderar på lösningarna till ekvationen $x^4 + 0,01 = 0$
Hon påstår sedan: ”Ekvationen har en negativ lösning.”

Har Lisa rätt? Motivera ditt svar. (1/0/0)

19. Temperaturen hos vattnet i en flaska som ställs in i ett kylskåp kan beskrivas med modellen $T(x) = 17e^{-0,693x} + 5$
där $T(x)$ är vattnets temperatur i °C och x är tiden i timmar efter att flaskan ställdes in i kylskåpet.

a) Bestäm vattnets temperatur då flaskan ställs in i kylskåpet. (1/0/0)

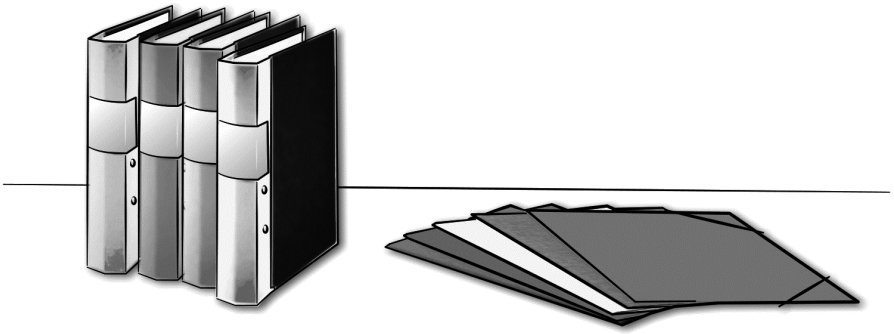
b) Bestäm efter hur lång tid vattnets temperatur är $10\,°C$. (2/0/0)

c) Bestäm hur snabbt vattnets temperatur sjunker två timmar efter att flaskan ställdes in i kylskåpet. (0/2/0)

d) Enligt modellen kommer vattnets temperatur med tiden att närma sig en undre gräns. Bestäm denna undre gräns med hjälp av modellen. (0/2/0)

20. Grafen till $f(x) = x^4 - 4x$ har en tangent i punkten P.
Tangenten har lutningen $-17,5$
Bestäm x-koordinaten för punkten P. (0/2/0)

21. Personalen i en pappershandel vill sälja ut ett lager av 300 pärmar och 520 mappar.



Pärmar Mappar

Personalen tänker göra i ordning två olika typer av paket:

- Paket 1 kostar 40 kr och innehåller 1 pärm och 2 mappar.
- Paket 2 kostar 100 kr och innehåller 3 pärmar och 4 mappar.

Intäkten från försäljningen kan skrivas $I = 40x + 100y$
där I är intäkten i kronor, x är antalet sålda Paket 1 och y är antalet sålda Paket 2.

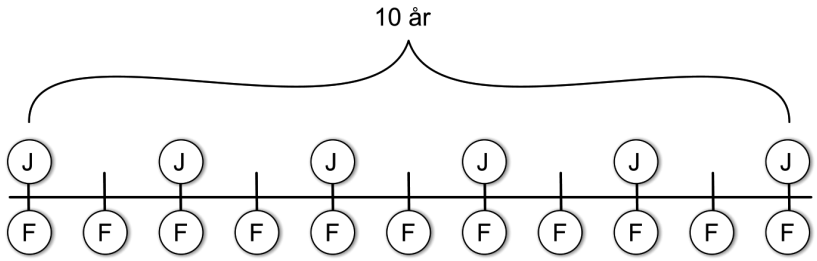
Informationen sammanfattas i tabellen:

Paket 1	**Paket 2**	**I lagret**
1 pärm	3 pärmar	300 pärmar
2 mappar	4 mappar	520 mappar
Intäkt: 40 kr	Intäkt: 100 kr	

Anta att alla paket som görs i ordning blir sålda.
Beräkna hur många paket av varje slag som ska göras i ordning för att intäkten ska bli så stor som möjligt. (0/3/0)

22. Frida och John tänker göra regelbundna insättningar på var sitt sparkonto med årsräntan 2 %. Frida tänker sätta in F kronor i början av varje år och John tänker sätta in J kr i början av vartannat år. De tänker göra sin första insättning samtidigt och sin sista insättning samtidigt 10 år senare.

Så här ser planen för deras sparande ut:



John vill ha lika mycket på sitt sparkonto som Frida har på sitt direkt efter att de gjort sina sista insättningar.

Visa att John i så fall måste sätta in cirka 83 % mer än Frida vid varje insättning, oavsett hur stort belopp Frida sätter in.

Bortse från eventuella skatteeffekter. (0/0/3)

23. Bakterien *Clostridium perfringens* kan orsaka allvarlig matförgiftning. Om mat som innehåller denna bakterie får svalna i rumstemperatur ökar antalet bakterier. Därför bör man alltid snabbt kyla ner maten efter tillagning. Det krävs ungefär 100 000 bakterier per gram mat för att en person ska bli matförgiftad.



Anta att det direkt efter tillagningen finns 100 bakterier per gram i en bit kokt lax. Den kokta laxen får svalna i rumstemperatur. Bakteriernas antal ökar med hastigheten $5,73e^{0,0573 \cdot t}$ bakterier per gram per minut vid tidpunkten t minuter.

Hur lång tid tar det innan det finns så många bakterier per gram i laxen att en person som äter av den riskerar att bli matförgiftad? (0/0/4)

24. Sara säljer blåbär på torget. Hon har upptäckt att varje gång hon höjer priset med 1 kr/kg minskar mängden blåbär som hon säljer per dag med 2 %. Om hon sätter priset till 40 kr/kg får hon sälja 30 kg per dag.

a) Bestäm dagsinkomsten D kr som funktion av prishöjningen x kr/kg, där $0 \le x \le 60$ *Endast svar krävs* (0/0/2)

b) Utgå från funktionsuttrycket i a)-uppgiften och rita grafen. Bestäm med hjälp av grafen vilket kilopris som ger den största dagsinkomsten. (0/0/1)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan ”*Hur?*” och en förklaring svarar på frågan ”*Varför?*”. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1.

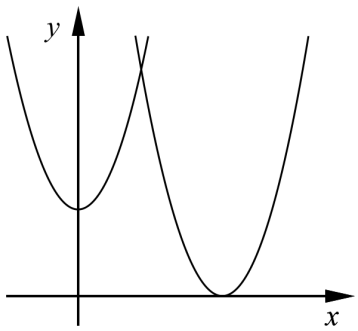
Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område begränsas av de positiva koordinataxlarna, kurvan $y = x^2 + 3$ och kurvan $y = (x-5)^2$

Beräkna områdets area.



Uppgift 2.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att $f(x) = 2x^4 - 4x^3$ där $-1 \le x \le 2$

a) Använd derivata för att rita grafen till funktionen.

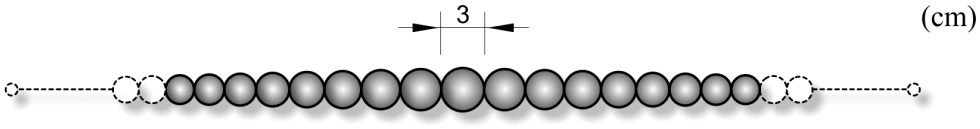
b) Bestäm funktionens största och minsta värde.

Uppgift 3.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren visar ett pärlhalsband. Den största pärlan i mitten har diametern 3 cm.
På båda sidor om den största pärlan sitter pärlor vars diametrar successivt minskar med 5 %. Halsbandet består av 27 pärlor.



a) Beräkna diametern för den yttersta pärlan på båda sidor.

b) Beräkna halsbandets längd.

Uppgift 4.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen f gäller att $f(x) = x^2 + x - 20$
I den punkt där kurvan skär positiva x-axeln har kurvan en tangent.
Beräkna var denna tangent skär y-axeln.