Delprov B	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 24 E-, 23 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 4x^3 + 7x + 2$ $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

2. Jamileh sätter in 5000 kr i början av varje år på ett sparkonto. Hon gör 12 insättningar och årsräntan är 2 %.

Ett av alternativen A-F visar hur mycket pengar hon har på sitt konto precis efter den tolfte insättningen. Vilket?

(Bortse från eventuella skatteeffekter.)

A. $5000 \cdot \frac{1{,}02^{11} - 1}{1{,}02 - 1}$ kr	B. $5000 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{1{,}02 - 1}$ kr	C. $5000 \cdot \frac{1{,}02^{13} - 1}{1{,}02 - 1}$ kr
D. $5000 \cdot \frac{0{,}02^{11} - 1}{0{,}02 - 1}$ kr	E. $5000 \cdot \frac{0{,}02^{12} - 1}{0{,}02 - 1}$ kr	F. $5000 \cdot \frac{0{,}02^{13} - 1}{0{,}02 - 1}$ kr

_____ (1/0/0)

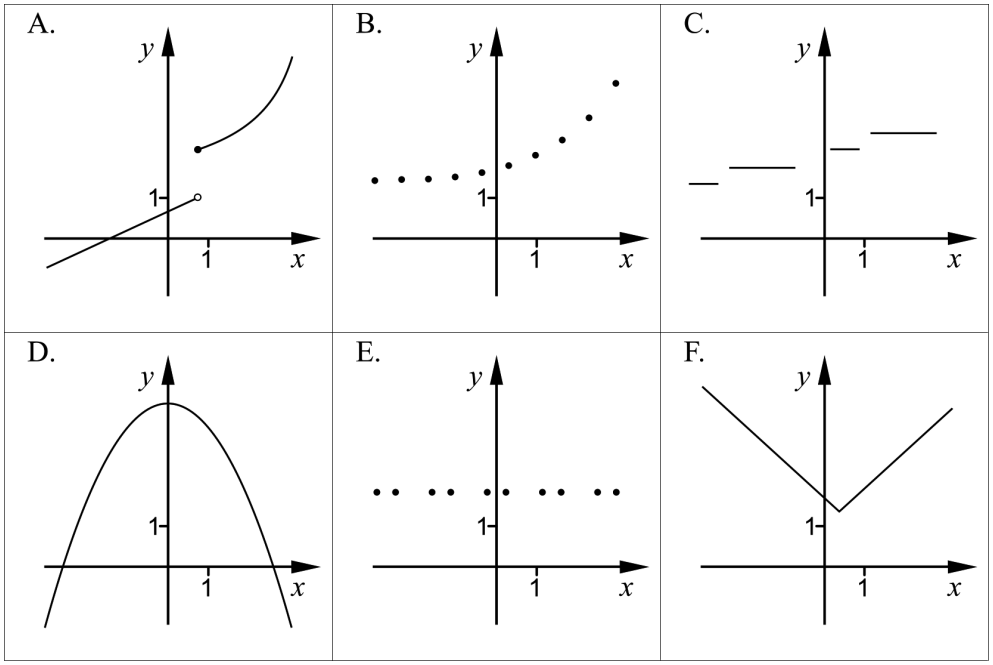
3. Figurerna visar de huvudsakliga egenskaperna hos graferna till sex olika funktioner.

a) Två av figurerna A-F visar en graf till en diskret funktion.
Vilka två?

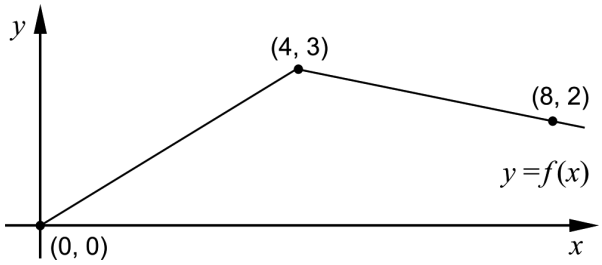
_____ (1/0/0)

b) Två av figurerna A-F visar en graf till en funktion som är kontinuerlig för alla x. Vilka två?

_____ (1/0/0)



4. Figuren visar grafen till funktionen f.



a) Bestäm $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ _____ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(5)$ _____ (1/0/0)

5. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $x(7+x)(7-x)+x^3$ _____ (1/0/0)

b) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^{-1}$ _____ (0/1/0)

c) $\frac{2}{x-2}+\frac{x}{2-x}$ _____ (0/1/0)

6. Bestäm ett tal A och ett tal B så att tredjegradsekvationen

$x(x+A)(\frac{2}{5}+Bx)=0$

får lösningarna $x_1=0$, $x_2=5$ och $x_3=-\frac{7}{3}$

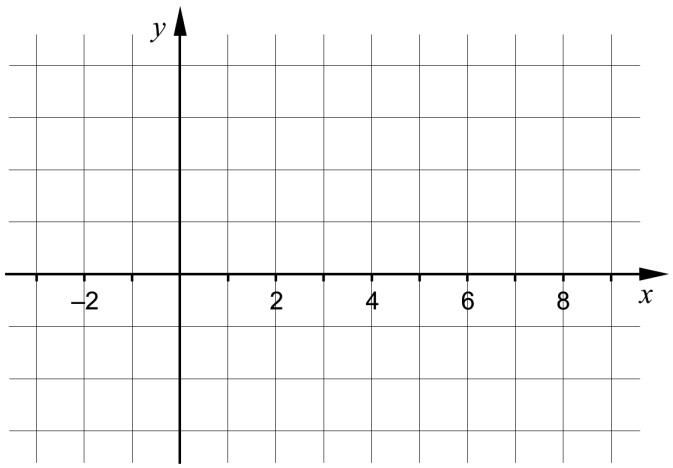
$A =$ _____ (1/0/0)

$B =$ _____ (0/1/0)

7. För en polynomfunktion f gäller att derivatan har endast två nollställen.
Tabellen visar derivatans tecken för några olika värden på x.

x	-2	0	2	5	7
$f'(x)$	–	0	+	0	+

Skissa en möjlig graf till funktionen f i koordinatsystemet nedan. (0/2/0)



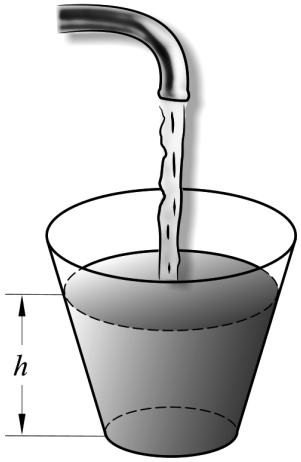
8. Det finns flera rationella uttryck som uppfyller följande villkor:

- Uttrycket har värdet 0 endast då $x = -5$
- Uttrycket är inte definierat för $x = 10$

Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som uppfyller båda villkoren.

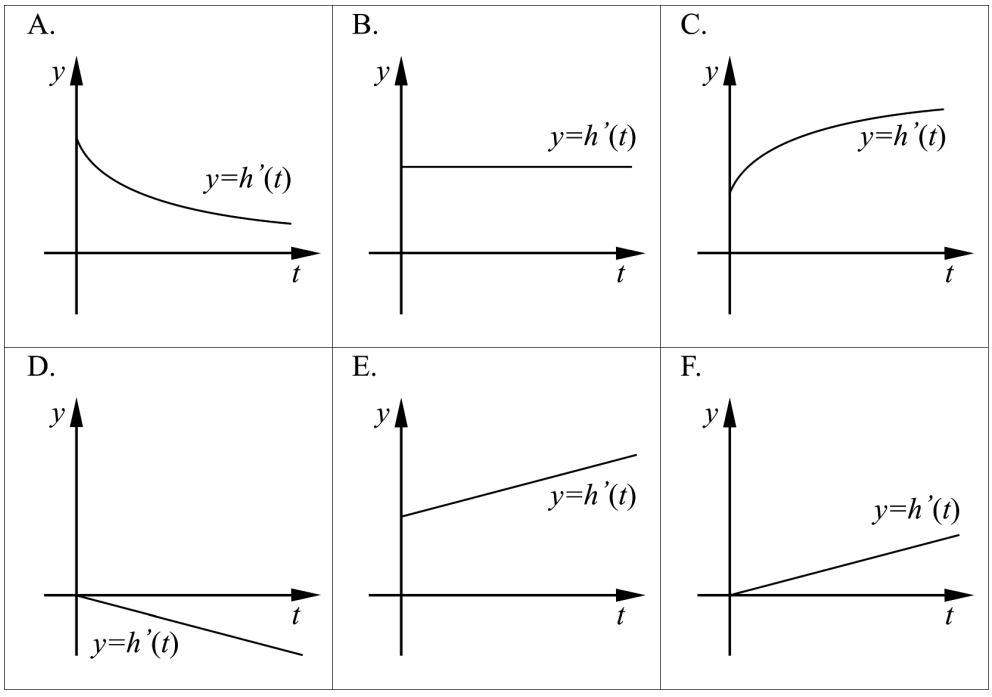
_____ (0/2/0)

9. Figuren visar hur vatten fylls i ett glas. Glaset är smalare nedtill. Vattnet rinner ur kranen med konstant hastighet. Vattenytans höjd h över glasets botten är en funktion av tiden t.



Vilken av graferna A-F beskriver *bäst* derivatan $h'(t)$ under den tid som glaset fylls?

_____ (0/1/0)



10. Ge ett exempel på en funktion f som inte är konstant och som har gränsvärdet 3 då $x \to \infty$.

$f(x) =$ _____ (0/0/1)

11. Lös ekvationen

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 2(x^7 - 1)$

_____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Olle och Olga säljer kantareller och funderar på att höja kantarellernas kilopris för att öka dagsinkomsten. De har kommit fram till att dagsinkomsten som funktion av prishöjningen ges av

$f(x) = -0{,}1x^2 + 5x + 3000$

där $f(x)$ är dagsinkomsten i kr och x är prishöjningen i kr/kg.



Beräkna, med hjälp av derivata, vilken prishöjning x som ger den största dagsinkomsten. (2/0/0)

13. Beräkna

a) $\int_1^2 4x^3 \, dx$ (2/0/0)

b) $\int_2^4 \frac{2}{x^2} dx$ (0/2/0)

14. Bestäm $f''(4)$ om $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Ange svaret på enklaste form. (0/2/0)

15. Vad måste gälla för att linjen $y = f(x)$ ska tangera kurvan $y = g(x)$ i den punkt där $x = a$? (0/0/2)

16.

Ett stambråk är ett bråk där täljaren är 1 och nämnaren är ett positivt heltal, det vill säga $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ och så vidare.
Egyptierna använde sig av stambråk i sina beräkningar. Istället för att skriva $\frac{5}{6}$ skrev de bråket som en summa av olika stambråk: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

Bråket $\frac{2}{3}$ kan skrivas som summan av tre stambråk som uppfyller villkoren:

- Det andra stambråket har en nämnare som är 3 gånger så stor som det första stambråkets nämnare.
- Det tredje stambråket har en nämnare som är 1 mindre än det första stambråkets nämnare.

Ställ upp en ekvation och visa genom att lösa denna att det endast finns ett sätt att skriva bråket $\frac{2}{3}$ som en summa av tre stambråk, om villkoren gäller. (0/0/3)

Delprov D	Uppgift 17-26. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 24 E-, 23 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 15 poäng på minst C-nivå
B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå
A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

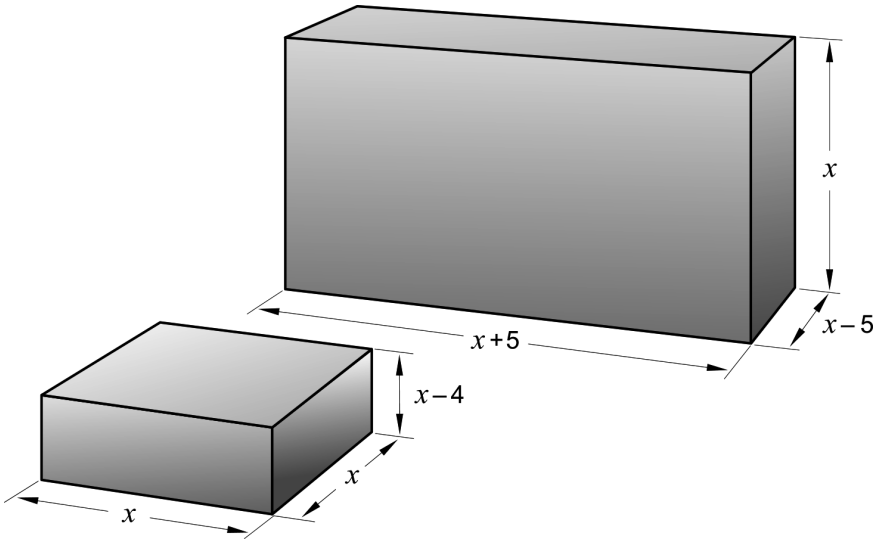
Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Figuren visar två rätblock med angivna sidlängder.



Bestäm x så att rätblockens volymer blir lika stora. (2/0/0)

18. I Sverige äter vi mer och mer pasta. Enligt en förenklad modell kan pastakonsumtionen i Sverige beskrivas med ett exponentiellt samband:

$P = 0{,}791 \cdot e^{0{,}0526 \cdot t}$

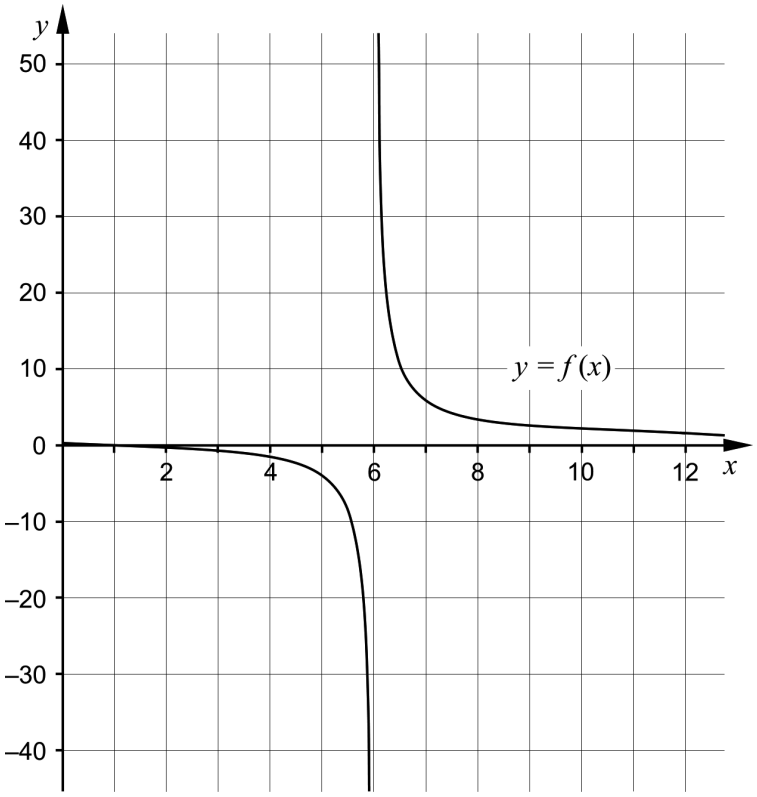
där P är den årliga pastakonsumtionen i kg per person och t är tiden i år efter år 1960.



a) Anta att pastakonsumtionen fortsätter att öka enligt modellen. Bestäm vilket årtal som den årliga pastakonsumtionen blir 15 kg per person. (2/0/0)

b) Modellen stämmer väl överens med verkligheten från 1960 fram till idag. Utvärdera hur väl modellen kommer att stämma överens med verkligheten i slutet av detta århundrade. (2/0/0)

19. Sofia ritar upp grafen till $f(x) = \dfrac{x-1}{x-6}$, se figur nedan.



a) Sofia påstår att: ”Största värdet nås när $x = 6$”
Har hon rätt? Motivera. (1/0/0)

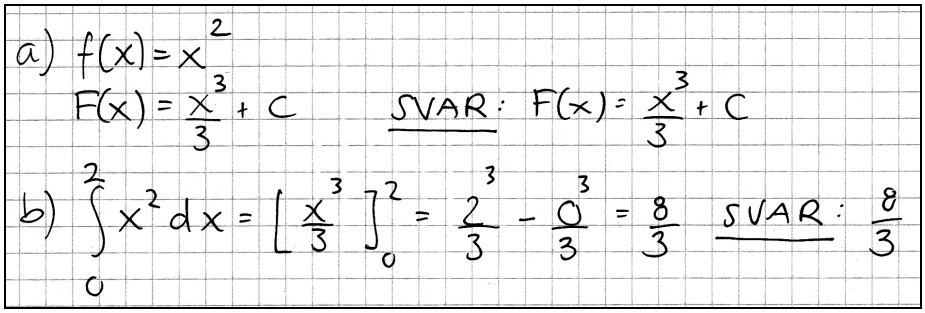
b) Sofia påstår att: ”För $x > 6$ är funktionens minsta värde 1”
Har hon rätt? Motivera. (0/1/1)

20. Kalle ska lösa följande uppgifter:

a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x^2$

b) Beräkna $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$

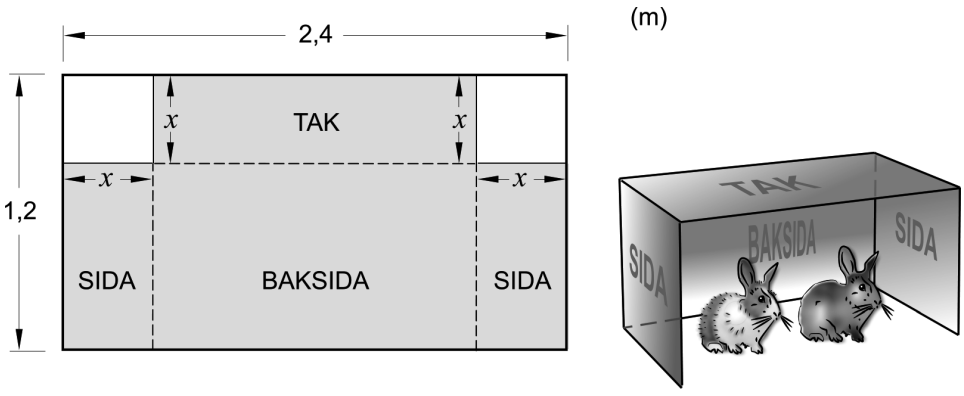
Nedan ser du hans lösning som är korrekt:



När han bestämmer alla primitiva funktioner i a)-uppgiften lägger han till en konstant C. Förklara varför han inte behöver lägga till en konstant C vid integralberäkningen i b)-uppgiften. (1/1/0)

21. Kajsa har en tunn plåt med måtten 2,4 m ×1,2 m. Av plåten ska hon bygga ett vindskydd till sina kaniner.

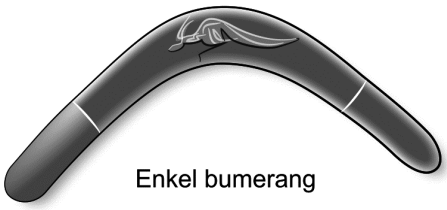
Vindskyddet ska bestå av ett tak, två sidor och en baksida. Kajsa tänker klippa bort två kvadratiska bitar från plåten och sedan vika ihop plåten till ett vindskydd. Kajsa vill att vindskyddet ska få så stor volym som möjligt. Anta att de plåtbitar hon ska klippa bort har längden x meter där $0 < x < 1{,}2$ Se figur.

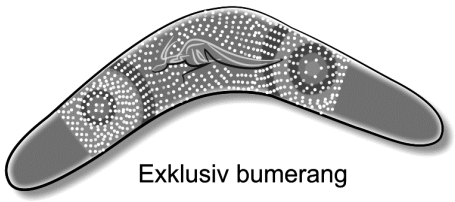


Bestäm x så att vindskyddet får så stor volym som möjligt. (0/3/0)

22. Grafen till $f(x) = x^4 - 4x$ har en tangent i punkten P.
Tangenten har lutningen $-17{,}5$
Bestäm x-koordinaten för punkten P. (0/2/0)

23. Företaget Kangaroo tillverkar två olika sorters bumeranger, en enkel och en exklusiv.


Enkel bumerang

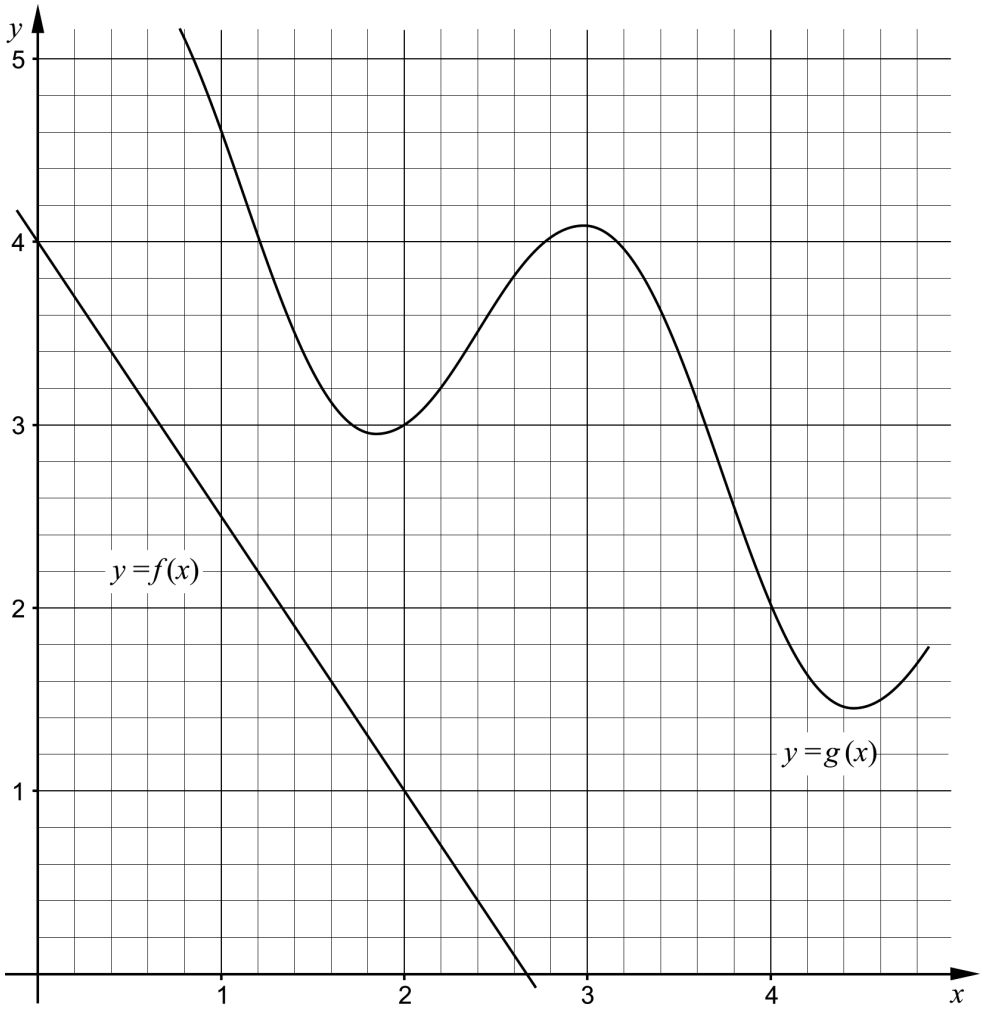

Exklusiv bumerang

Bumerangerna ska först snidas med kniv och sedan målas. En enkel bumerang tar 1 timme att snida och 1,5 timmar att måla. En exklusiv bumerang tar 2 timmar att snida och 2 timmar att måla. Varje vecka kan de anställda snida i totalt 140 timmar och måla i totalt 180 timmar.

Företaget gör en vinst på 5 AUD (1 AUD = 1 australisk dollar) för varje såld enkel bumerang och 8 AUD för varje såld exklusiv bumerang. Vinstfunktionen blir då $V = 5x + 8y$ där V är vinsten i AUD, x är antalet tillverkade enkla bumeranger och y är antalet tillverkade exklusiva bumeranger.

Anta att alla bumeranger de tillverkar blir sålda. Hur många enkla respektive exklusiva bumeranger ska företaget tillverka och sälja varje vecka för att få maximal vinst? (0/3/0)

24. Figuren visar graferna till funktionerna f och g.



För funktionen h gäller att $h(x) = f(x) - g(x)$.
Bestäm $h'(2)$. (0/0/2)

25. För en polynomfunktion f gäller att:

- $f''(x) = -2$ för alla x
- $f(1) = 5$
- $f(2) = 3$

Bestäm funktionen f. (0/0/2)

26. Antalet bakterier i en odling ökar exponentiellt med tiden. Klockan 16.00 är antalet bakterier 20 000 och tillväxthastigheten är då 5 000 bakterier/timme.



Bestäm hur många bakterier som fanns i bakterieodlingen klockan 12.00 (0/0/3)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.
Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

Uppgift 1.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Låt $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$

Bestäm funktionens extrempunkter. Skissa med hjälp av dessa punkter funktionens graf.

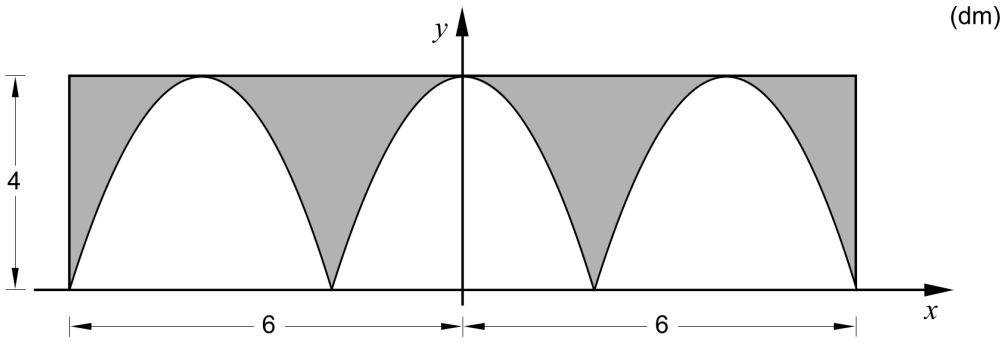
Uppgift 2.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren visar en rektangulär bård med ett mönster bestående av tre likadana parabler. Bården är 4 dm hög och 12 dm lång. Bestäm arean av det gråmarkerade området.



Uppgift 3.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

En skräddare ska tillverka fodrade kostymer och fodrade jackor i ylle. Till varje kostym går det åt 1,5 m fodertyg och 3,0 m ylletyg. Till varje jacka går det åt 2,0 m fodertyg och 2,0 m ylletyg. Skräddaren har tillgång till 90 m fodertyg och 120 m ylletyg.

Han tjänar 3000 kr på varje kostym och 2500 kr på varje jacka som han säljer.

Anta att skräddaren säljer alla kostymer och jackor som han tillverkar och att han vill göra en så stor vinst som möjligt.

Beräkna den största vinst som skräddaren kan göra.



Jacka Kostym

Uppgift 4.

Namn:_____

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I figuren visas grafen till $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ och en rät linje. Dessa skär varandra i punkterna A och B som har x-koordinaterna -6 och -3, se figur.
Bestäm var på grafen till f det finns tangenter som är parallella med den givna linjen.

