| | |
|---|---|
| **Delprov B** | Uppgift 1-10. Endast svar krävs. |
| **Delprov C** | Uppgift 11-15. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans. |
| **Hjälpmedel** | Formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 64 poäng varav 23 E-, 22 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 16 poäng
D: 25 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 33 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 43 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux:_____

**Delprov B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

**1.** För polynomfunktionen $f$ gäller att $f(x) = 3x^4 + 7x^2 + 3$

a) Vilken grad har funktionen $f$? _____ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(x)$. _____ (1/0/0)

**2.** Ange två olika primitiva funktioner till $f(x) = 7x + 4$

_____ och _____ (2/0/0)

**3.** Under de första sekunderna efter start kan sträckan som en bil färdas beskrivas med $s(t) = 3t + t^2$ där *s* är sträckan i meter och *t* är tiden i sekunder.



Bestäm bilens hastighet *v* som funktion av tiden *t*.

$v(t) =$ _____ (1/0/0)

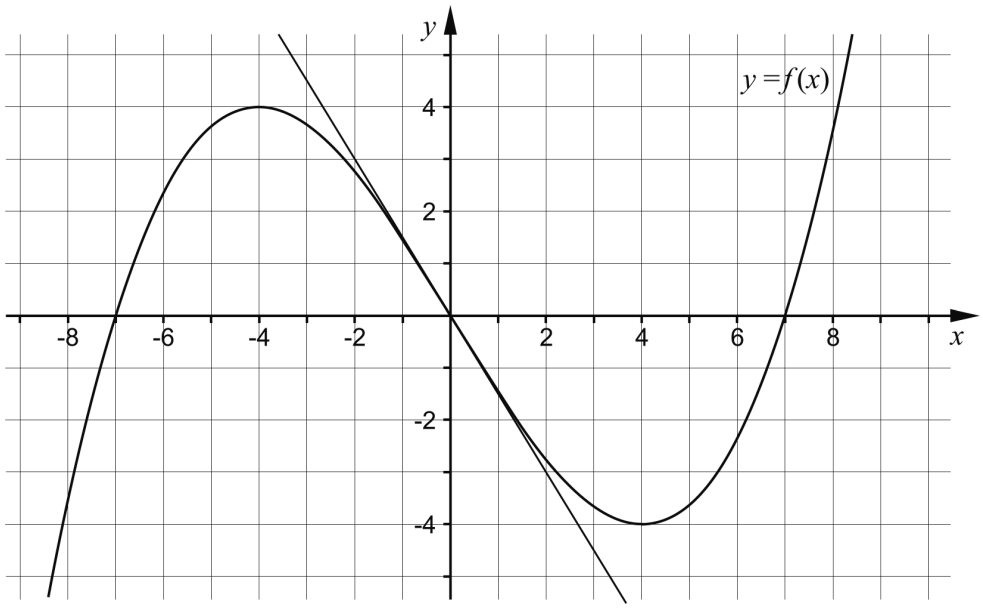
**4.** Lös ekvationen $(x+2)(x-3)(x+4) = 0$ _____ (1/0/0)

**5.** Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $16 + (x^3 + 4)(x^3 - 4)$ _____ (1/0/0)

b) $\dfrac{x}{(x+4)^9} + \dfrac{4}{(x+4)^9}$ _____ (0/1/0)

**6.** Figuren nedan visar grafen till en tredjegradsfunktion $f$ och en tangent som tangerar grafen i origo.




a) Bestäm derivatans nollställen. _____ (1/0/0)

b) Bestäm $f'(0)$. _____ (1/0/0)

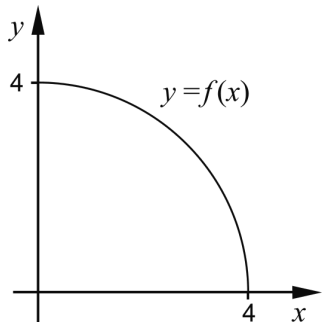
c) Skissa grafen till funktionens derivata i koordinatsystemet ovan. (0/1/1)

**7.** Den geometriska summan $2-2\cdot1{,}5+2\cdot1{,}5^2-2\cdot1{,}5^3+\ldots-2\cdot1{,}5^{19}$ är lika med ett av alternativen A-H. Vilket?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{18}-1}{-1{,}5-1}$ | B. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{19}-1}{-1{,}5-1}$ | C. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{20}-1}{-1{,}5-1}$ | D. $2\cdot\frac{(-1{,}5)^{21}-1}{-1{,}5-1}$ |
| E. $2\cdot\frac{1{,}5^{18}-1}{1{,}5-1}$ | F. $2\cdot\frac{1{,}5^{19}-1}{1{,}5-1}$ | G. $2\cdot\frac{1{,}5^{20}-1}{1{,}5-1}$ | H. $2\cdot\frac{1{,}5^{21}-1}{1{,}5-1}$ |

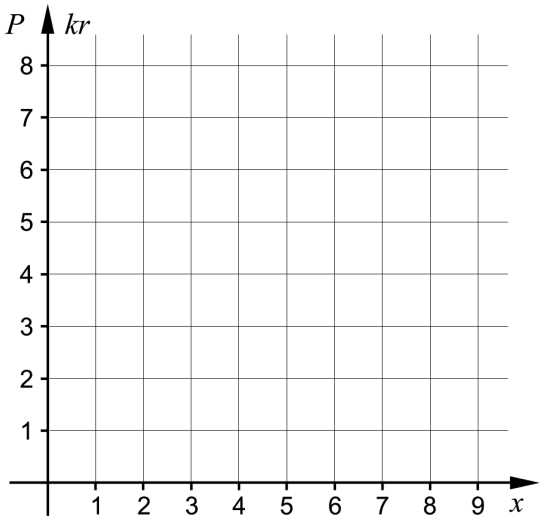
_____ (0/1/0)

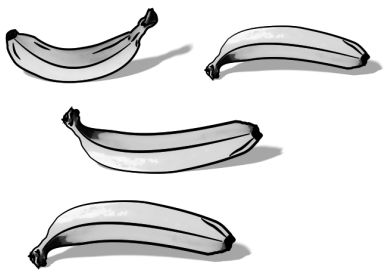
**8.** Grafen till funktionen $f$ bildar en kvartscirkel i första kvadranten.




Bestäm $\int_0^4 f(x)\,dx$. Svara exakt. _____ (0/1/0)

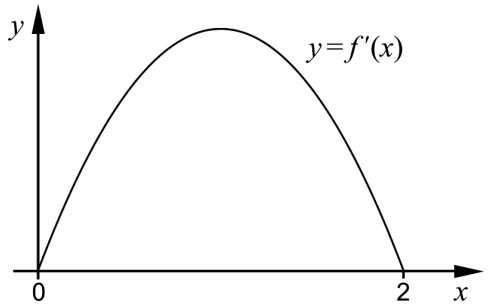
**9.** I Hagaskolans cafeteria kostar bananer 2 kr per styck. Priset $P$ kr är en funktion av antalet bananer $x$. Rita in grafen till funktionen i intervallet $1 \le x \le 4$ i koordinatsystemet nedan.



(0/1/0)

**10.** Funktionen $f$ har derivatan $f'$. Figuren nedan visar grafen till $f'$.
Avgör vilket påstående A-F som *alltid* är sant.




A. $f(2)$ är positiv

B. $f(2) - f(0)$ är positiv

C. $f(1)$ är noll

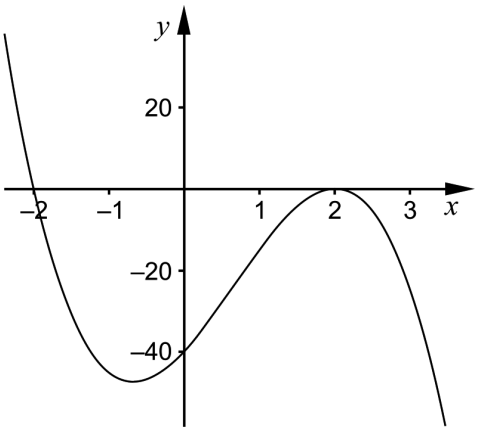
D. $f(0)$ är noll

E. $f(1) - f(2)$ är positiv

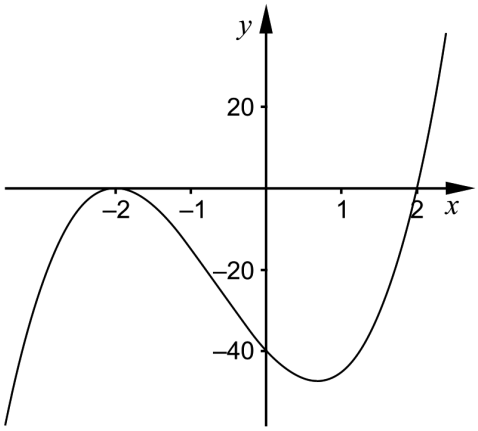
F. $f(0) - f(1)$ är positiv _____ (0/0/1)

**Delprov C**: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**11.** Figurerna A och B nedan visar graferna till två tredjegradsfunktioner.




Figur A



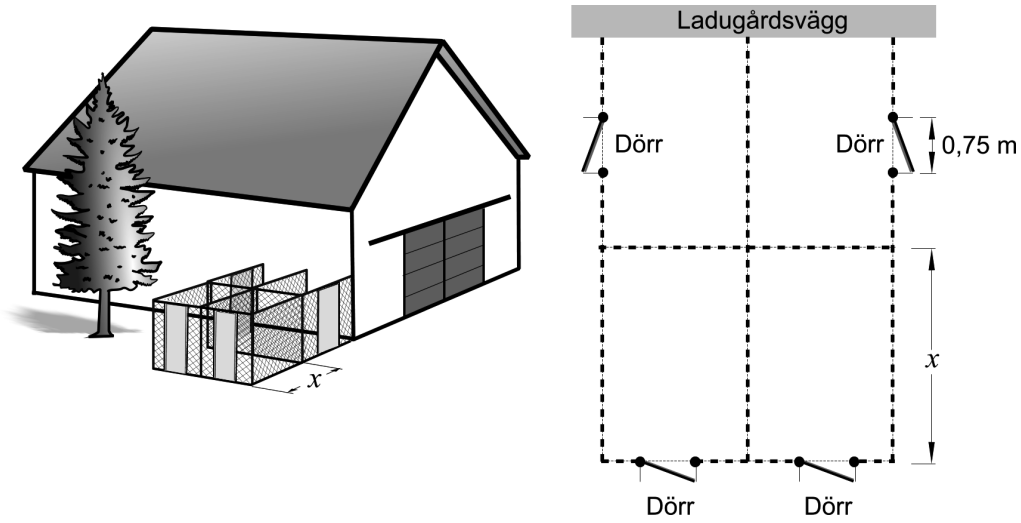

Figur B

a) Vilken av figurerna visar grafen till en tredjegradsfunktion $f$ där $f'(2) = 0$ ? Motivera ditt svar. (1/0/0)

b) Vilken av figurerna visar grafen till $f(x) = 5(x-2)(x+2)^2$ ? Motivera ditt svar. (0/1/0)

**12.** Karin ska bygga fyra rektangulära rastgårdar till sina hundar. Alla fyra rastgårdar ska ha samma mått och inhägnas med stängsel.

Karin har 45 m stängsel och fyra dörrar som hon ska använda till rastgårdarna. Två av rastgårdarna byggs mot en ladugårdsvägg. Därför behövs inte stängsel på den sida som utgörs av ladugårdsväggen. Dörrarna är 0,75 m breda, lika höga som stängslet och ska placeras enligt figuren.




Arean för var och en av rastgårdarna ges av funktionen $A(x) = 12x - 1{,}5x^2$ där $A$ är arean i $m^2$ och $x$ är längden av rastgårdens ena sida i m, se figur.

a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på $x$ som ger varje rastgård så stor area som möjligt. (2/0/0)

b) Visa att arean av en rastgård ges av funktionen $A(x) = 12x - 1{,}5x^2$ (0/0/3)

**13.** Lös ekvationen $\frac{6}{x-3} - \frac{18}{x(x-3)} = 2$ (0/3/0)

**14.** Beräkna $\int_0^4 e^{\frac{x}{2}}\,dx$. Svara exakt. (0/2/0)

**15.** Bestäm konstanten $A$ så att $\lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{4x + A} = \frac{1}{7}$ (0/0/3)

| | |
|---|---|
| **Delprov D** | Uppgift 16-24. Fullständiga lösningar krävs. |
| **Provtid** | 120 minuter. |
| **Hjälpmedel** | Digitala verktyg, formelblad och linjal. |

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 64 poäng varav 23 E-, 22 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 16 poäng
D: 25 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 33 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 43 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: _____

Födelsedatum: _____

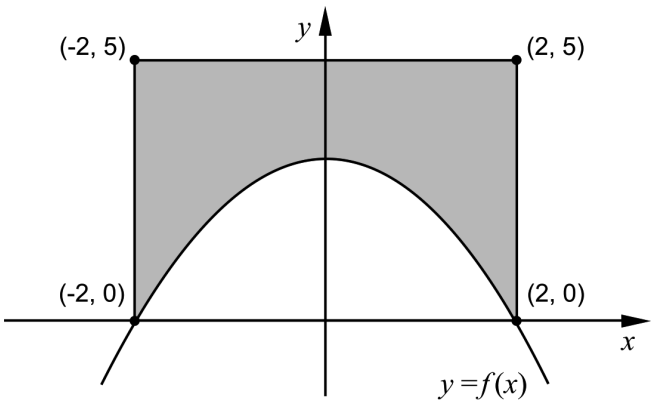
Gymnasieprogram/Komvux:_____

**Delprov D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

**16.** Bestäm de värden på $x$ för vilka det gäller att grafen till $f(x) = x^3 - 0{,}88x$ har lutningen 5 (2/0/0)

**17.** Lös ekvationen $x(x^2 - 5) = 5(2 - x)$ (2/0/0)

**18.** Figuren nedan visar grafen till $f(x) = -0{,}75x^2 + 3$ och en rektangel. Rektangeln har sina hörn i punkterna (–2, 0), (–2, 5), (2, 0) och (2, 5).




a) Använd figuren och förklara med ord varför $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ (1/1/0)

b) Bestäm arean av det skuggade området. (2/1/0)

**19.** Andrea ska börja spara pengar på ett konto genom att i början av varje år sätta in samma belopp. Hon vill spara ihop 50 000 kr till en resa. Hon tänker göra sin första insättning i början av år 2014 och den sista i början av år 2020. Hon räknar med att årsräntan kommer att vara 2 % under hela tidsperioden.

Hur stort belopp ska hon sätta in varje gång om hon vill ha 50 000 kr på kontot omedelbart efter den sista insättningen? (0/2/0)

**20.** Idag finns det cirka 7 miljarder människor på jorden. En modell som beskriver antalet människor på jorden som funktion av tiden är

$$N(t) = \frac{11}{1 + 3{,}4\mathrm{e}^{-0{,}03 \cdot t}}$$

där $N$ är antalet människor i miljarder och $t$ är tiden i år efter 1950.



a) Bestäm antalet människor på jorden år 1950. (1/0/0)

b) Enligt modellen kommer antalet människor på jorden med tiden att närma sig en övre gräns. Bestäm denna övre gräns för antalet människor med hjälp av modellen. (0/3/0)

**21.** För en funktion $f$ gäller att $f(x) = (x-a)(x-b)$ där $a$ och $b$ är konstanter. Bestäm det samband som ska gälla mellan $a$ och $b$ för att grafen till $f$ ska ha en tangent med lutningen 2 då $x = 4$ (0/3/0)

**22.** För polynomfunktionen $f$ gäller att $f'(x) > 0$ för alla $x$.
Undersök hur många reella lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har. (0/0/2)

**23.** Albins vikt kan beskrivas med funktionen $V(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$ där vikten $V$ kg är en funktion av tiden $t$ år efter födseln. Funktionen gäller under hans åtta första levnadsår.



Den hastighet som Albins vikt ökar med varierar. Bestäm vilka värden hastigheten kan anta under Albins åtta första levnadsår. (0/0/2)

**24.** Anton och Amanda har fått i uppdrag att baka bullar och kakor som de ska sälja för att få pengar till en skolresa. De skriver upp de två recepten på ett papper och bestämmer att vinsten ska vara 4 kr per bulle och 2 kr per kaka.

**Recept för 100 bullar**

2400 gram mjöl
500 gram smör
---

180 gram socker
2,5 paket jäst
1,5 liter mjölk
1 tesked salt

**Vinst:** 4 kr per bulle



**Recept för 100 kakor**

600 gram mjöl
500 gram smör
---

170 gram socker
4 teskedar bakpulver
6 teskedar vaniljsocker

**Vinst:** 2 kr per kaka

Anton och Amanda vill göra så stor vinst som möjligt samtidigt som de funderar på om de ska baka av båda sorterna eller om det räcker med att bara baka en av sorterna. De räknar med att sälja allt de bakar.

För att veta hur mycket de kan baka tar de reda på hur mycket smör och mjöl de har hemma. Tillsammans har de 4800 gram mjöl och 1750 gram smör.

Bestäm den maximala vinst som Anton och Amanda kan göra på sin bakning.
Du behöver bara ta hänsyn till hur mycket mjöl och smör som går åt. (0/0/4)

## Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

*Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är*
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

*Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning*
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

*Hur väl du använder den matematiska terminologin*
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att $x^2$ utläses ”$x$ upphöjt till 2” eller ”$x$ i kvadrat”.

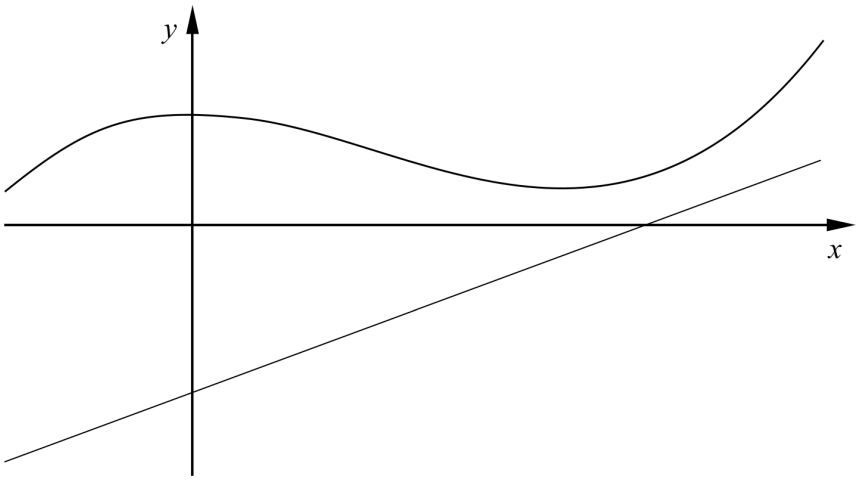
Några exempel på matematiska symboler är $\pi$ och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”$f$ av $x$”.

## Uppgift 1.

Namn:_____

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Bestäm det kortaste avståndet i $y$-led mellan graferna till funktionerna $f$ och $g$ där $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 12$ och $g(x) = 7{,}5x - 18$ då $x > 0$

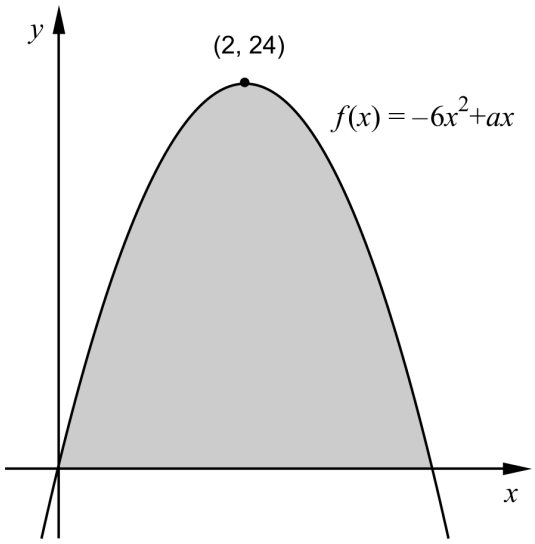


## Uppgift 2.

Namn:_____

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

För funktionen $f$ gäller att $f(x) = -6x^2 + ax$ där $a$ är en konstant. Grafen till funktionen $f$ har en maximipunkt (2, 24), se figur.




Bestäm arean av det skuggade området som begränsas av grafen till funktionen $f(x) = -6x^2 + ax$ och $x$-axeln.

## Uppgift 3.

Namn:_____

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I den här uppgiften ska du undersöka funktionen $v = 3x + y$
För de två variablerna $x$ och $y$ gäller villkoren:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ x + 2y \leq 16 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

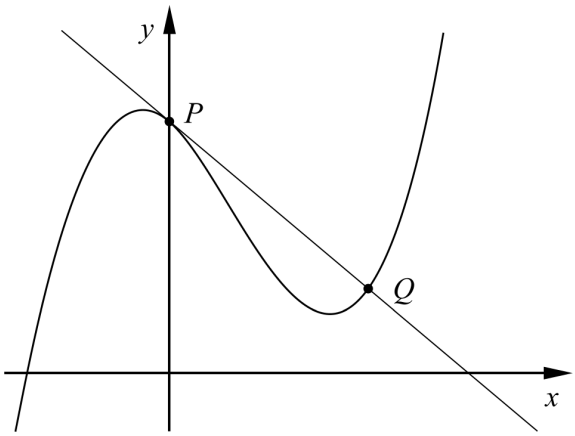
Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $v = 3x + y$ kan anta.

## Uppgift 4.

Namn:_____

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren visar kurvan $y = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 9$ och kurvans tangent i punkten $P$ där $x = 0$
Denna tangent skär kurvan i en annan punkt $Q$.




Bestäm koordinaterna för punkten $Q$.