

Delprov B	Uppgift 1–10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11–19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för delprov B och delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 22 C- och 16 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 40 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 47 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 5x$ $f'(x) =$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = (5x + 2)^{10}$ $g'(x) =$ _____ (1/0/0)

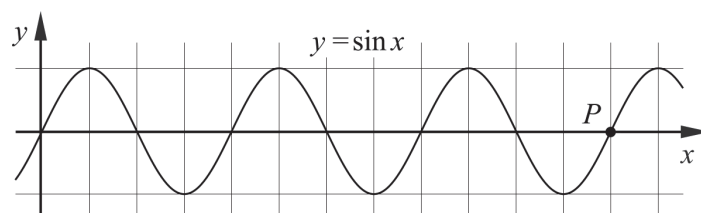
c) $h(x) = x^7 \cdot e^x$ $h'(x) =$ _____ (1/0/0)

2. Funktionen f ges av $f(x) = 2 + 5 \cos 4x$.

a) Ange funktionens period. _____ (1/0/0)

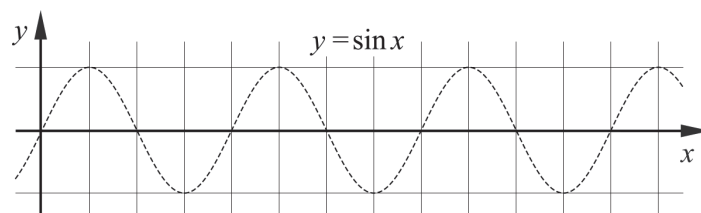
b) Ange funktionens minsta värde. _____ (1/0/0)

3. Figuren visar kurvan $y = \sin x$ och en punkt P .
Punkten P ligger på kurvan och har y -koordinaten 0



a) Ange x -koordinaten för punkten P .
Svara i radianer. _____ (1/0/0)

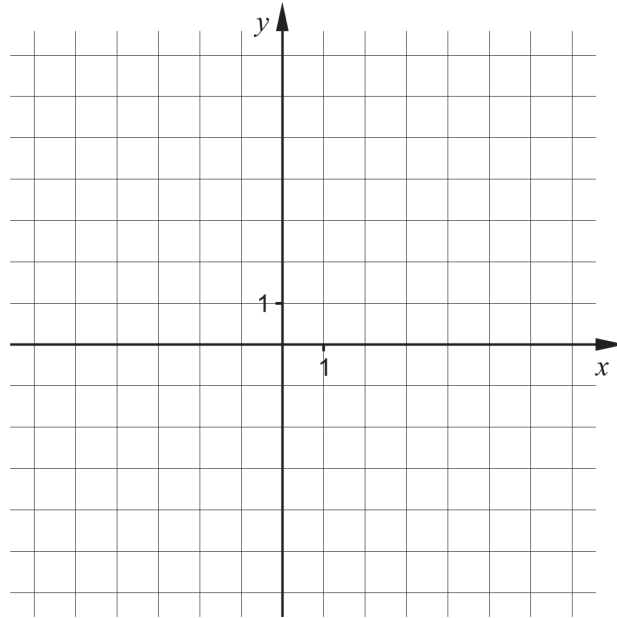
b) Skissa kurvan $y = \sin \frac{x}{2}$ i koordinatsystemet. Till din hjälp är kurvan $y = \sin x$ inritad.



(1/0/0)

4. En kurva ges av $y = \frac{3}{x+2} + x - 1$

Rita in asymptoterna till kurvan i koordinatsystemet.



(1/1/0)

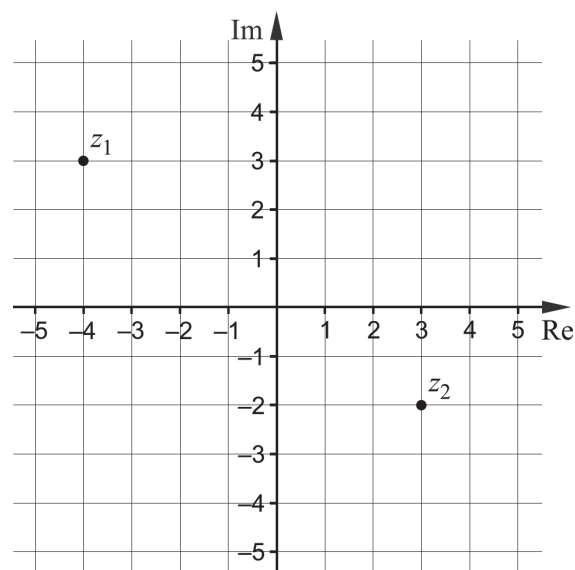
5. Bestäm $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x) dx$.

_____ (0/1/0)

6. Bestäm $|z|$ då $z = e^{2+i\pi}$

_____ (0/1/0)

7. Figuren visar det komplexa talplanet där talen z_1 och z_2 är markerade.



- a) Bestäm $\bar{z}_1$ _____ (1/0/0)
- b) Bestäm $\arg(z_2 - 1)$ _____ (0/1/0)
- c) Markera alla komplexa tal z som uppfyller $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z + z_2)$ _____ (0/0/1)
8. Bestäm $\int_0^{\pi} (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)) dx$
 då $g(x) = \cos x$ och $h(x) = x^2$ _____ (0/0/1)
9. Ange en icke-reell rot till ekvationen $z^{10} - 1 = 0$ _____ (0/0/1)
10. Ett område i första kvadranten begränsas av kurvan $y = x^{\frac{1}{4}}$, linjen $y = 2$ och y -axeln. När detta område roterar kring y -axeln bildas en rotationskropp vars volym ges av $\pi \int_0^2 g(y) dy$.
 Ange funktionen g . $g(y) =$ _____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Skriv $\frac{8+6i}{1+2i}$ på formen $a+bi$. (2/0/0)

12. Lös ekvationen $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2/1/0)

13. Visa att $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z$ för alla komplexa tal z . (2/0/0)

14. Funktionerna f och g ges av $f(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 2z - 10$ och $g(z) = z^2 - 1$

a) Visa att $f(z)$ är delbart med $g(z)$. (0/1/0)

b) Lös ekvationen $f(z) = 0$ (0/2/0)

15. Visa att $\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \tan 2x$. (0/2/0)

16. För vinkeln v gäller villkoren:

- $\sin^2 v = \frac{8}{9}$
- $90^\circ < v < 180^\circ$

Bestäm $\tan v$. (0/3/0)

17. Funktionen f ges av $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$
Bestäm konstanterna a och b så att $f(1) = 4$ och $f'(1) = 3$ (0/3/0)

18. Visa att ekvationen $\sin v \cos 40^\circ = \sin v + \cos v \sin 40^\circ$ saknar lösningar i intervallet $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$ (0/0/2)

19. Funktionen f har en primitiv funktion $F(x) = 3x \ln x$ och funktionen g har en primitiv funktion $G(x) = x(\ln x)^2 + 3x$.

Bestäm rötterna till ekvationen $f(x) = g(x)$. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 20–27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 22 C- och 16 A-poäng.

Gräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 40 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 47 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

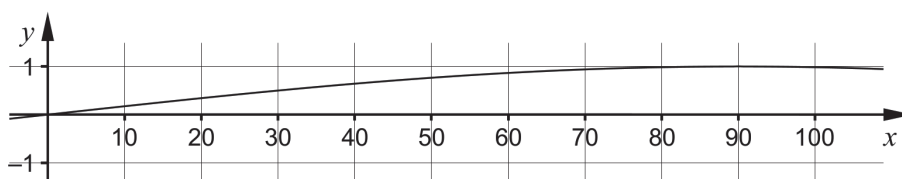
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

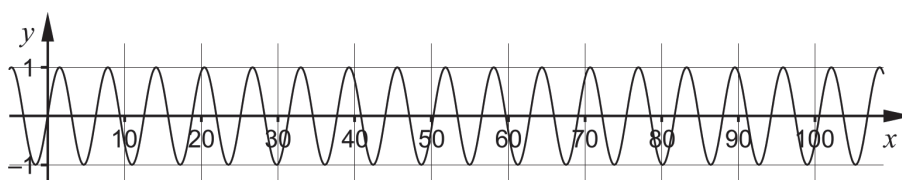
Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Till flera av uppgifterna krävs att du använder digitala verktyg för att kunna lösa dem. Till övriga uppgifter kan det vara en fördel att använda de digitala verktygen vid lösning av uppgiften. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Yosef och Zara ritar kurvan $y = \sin x$ på sina digitala verktyg. När de jämför sina kurvor upptäcker de att kurvorna ser olika ut. Se figur.

Yosefs kurva



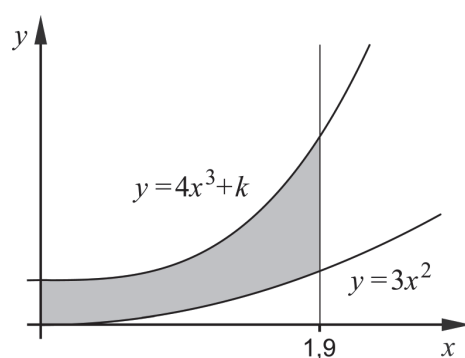
Zaras kurva



Förklara varför kurvornas utseende skiljer sig åt på detta sätt.

(1/0/0)

21. Figuren visar ett gråmarkerat område som begränsas av y -axeln, linjen $x = 1,9$ samt kurvorna $y = 3x^2$ och $y = 4x^3 + k$ där k är en positiv konstant.



För ett visst värde på k är arean av det gråmarkerade området 13 areaenheter.

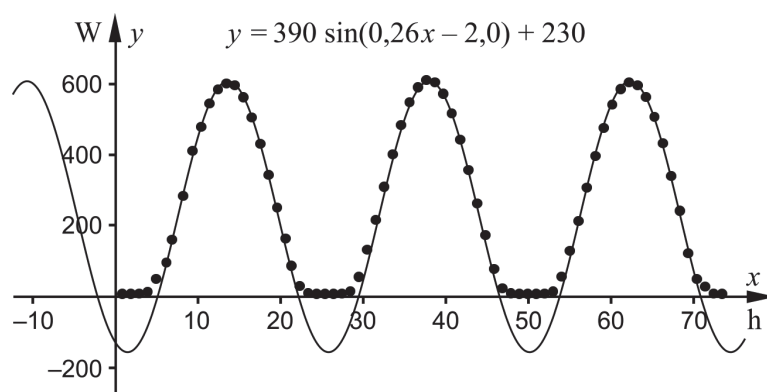
Bestäm detta värde på k . Svara med minst en decimal.

(2/0/0)

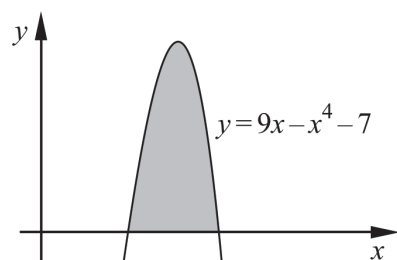
22. I en solpanel omvandlas energi från solstrålningen till elektricitet.

Solveig har satt upp en liten solpanel och mäter hur mycket effekt som den ger under några molnfria dagar. Hon upptäcker att mätvärdena varierar periodiskt och anpassar en sinuskurva till mätvärdena. Ekvationen för sinuskurvan blir $y = 390 \sin(0,26x - 2,0) + 230$ där x är tiden i timmar från klockan 00.00 den 23 juli 2020 och y är effekten i watt (W).

Figuren visar hennes mätvärden och den anpassade sinuskurvan.



- a) Bestäm hur stor effekten var klockan 19.00 den 23 juli 2020.
Svara med minst två värdesiffror. *Endast svar krävs* (1/0/0)
- b) Bestäm förändringshastigheten för effekten klockan 15.30 den 23 juli 2020 mätt i W/h. Svara med minst två värdesiffror. (2/0/0)
23. Figuren visar ett gråmarkerat område som begränsas av kurvan $y = 9x - x^4 - 7$ och x -axeln. Det gråmarkerade området roteras runt x -axeln och bildar en rotationskropp.



Bestäm volymen av rotationskroppen. Svara med minst två decimaler. (0/2/0)

24. Eleverna i klass TE19C har varit på föreläsning och är därför sena till efterföljande matematiklektion som började klockan 12.00.

Tiden som en elev är sen till matematiklektionen har en sannolikhetsfördelning med täthetsfunktionen $f(t) = 0,02t \cdot e^{-0,01t^2}$ där t är antalet minuter som en elev är sen till matematiklektionen.

Bestäm hur många av klassens 32 elever som hunnit till matematiklektionen klockan 12.05.

(0/2/0)

25. Under ett blåsigt dygn kan vindhastigheten vid ett vindkraftverk beskrivas med modellen

$$v(x) = 11 \sin(0,11x - 0,89) + 28, \quad 0 \leq x \leq 24$$

där v är vindhastigheten i km/h och x är tiden i timmar från klockan 00.00.



- a) Bestäm den högsta vindhastigheten under dygnet. *Endast svar krävs* (1/0/0)

Vid vindhastigheter över 36 km/h vinklas rotorbladen för att minska slitage.

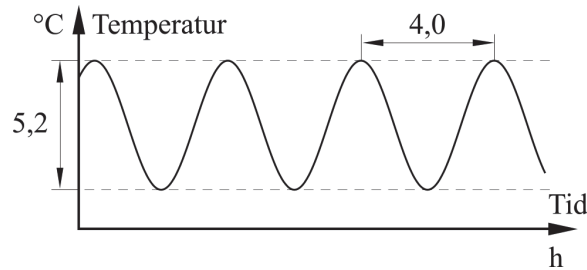
- b) Bestäm hur lång tid som vindhastigheten är över 36 km/h under det aktuella dygnet. (0/1/0)

Vid vindhastigheter mellan 0 och 36 km/h kan mängden elenergi som produceras beräknas med hjälp av sambandet $P(v) = 0,42 \cdot v^3$ där $P(v)$ är mängden producerad elenergi per timme i MJ/h och där v är vindhastigheten i km/h.

Vid vindhastigheter över 36 km/h är produktionen av elenergi per timme lika stor som för vindhastigheten 36 km/h.

- c) Bestäm den totala mängden elenergi som vindkraftverket producerar under dygnet. (0/0/3)

26. Temperaturen i ett kylrum varierar periodiskt med perioden 4,0 h, vilket beror på ett krånglande kylaggregat. Temperaturdifferensen mellan den högsta och den lägsta temperaturen är 5,2 °C. Se figur.



Klockan 08.30 är temperaturen maximal och en timme senare har den sjunkit till 3,9 °C.

Temperaturen i kylrummet kan beskrivas med modellen

$$T(t) = A \cdot \cos(Bt + C) + D$$

där $T(t)$ är temperaturen i °C och t är tiden i timmar från klockan 00.00.

Bestäm konstanterna A , B , C och D .

Endast svar krävs

(0/1/2)

27. Låt $C = \int_a^b (7x - x^2 - 10) dx$ där $a < b$.

- a) Bestäm värdet av $(b - a)$ då C antar sitt största värde.

Endast svar krävs

(0/0/1)

- b) Bestäm vilket värde $(b - a)$ maximalt kan anta då $C = 0$

Svara med minst en decimal.

(0/0/2)