

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning	3
Bedömningsanvisningar	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	4
Provsammanställning – Kunskapskrav	5
Provsammanställning – Centralt innehåll	6
Kravgränser	7
Resultatsammanställning.....	7
Bedömningsformulär.....	8
Bedömningsanvisningar	9
Delprov B	9
Delprov C	10
Delprov D	12
Bedömda elevlösningar	15
Uppgift 7.....	15
Uppgift 13.....	16
Uppgift 14.....	16
Uppgift 20.....	18
Uppgift 25.....	20
Uppgift 26.....	21
Uppgift 28.....	22
Ur ämnesplanen för matematik	25
Kunskapskrav Matematik kurs 4.....	26
Centralt innehåll Matematik kurs 4.....	27

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarusuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E_R	1 E_R och 1 C_R	1 E_R , 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{}, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (), [], \int, dx$, gradtecken, index, $\lim$, VL, HL, $\sin v, \sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsområde, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differential-ekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 13_1 och 13_2 den första respektive andra poängen i uppgift 13.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a	1											
	1b		1										
	2a	1											
	2b	1											
	3	1											
	4a	1											
	4b	1											
	5a					1							
	5b					1							
	6							1					
C	7					1							
	8									1			
	9									1			
	10											1	
	11_1		1										
	11_2		1										
	12_1		1										
	12_2		1										
	12_3					1							
	13_1				1								
	13_2				1								
	14_1			1									
	14_2			1									
	14_3							1					
	15_1					1							
	15_2					1							
	15_3							1					
	16_1							1					
	16_2							1					
	17_1						1						
	17_2										1		
	18_1											1	
	18_2											1	
	19_1										1		
	19_2										1		
	20_1											1	
	20_2											1	

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	21_1		1										
	21_2		1										
	22_1			1									
	22_2			1									
	23_1			1									
	23_2			1									
	23_3							1					
	24a			1									
	24b_1							1					
	24b_2							1					
	25_1						1						
	25_2							1					
	25_3								1				
	26_1							1					
	26_2							1					
	26_3										1		
	26_4											1	
	27_1							1					
	27_2										1		
	27_3										1		
	28_1						1						
	28_2										1		
	28_3										1		
	28_4												1
	Total	6	7	7	2	3	5	9	5	2	2	7	6
	Σ	61	22				22				17		

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4																	
					Aritmetik, algebra och förändring									Samband och förändring					Problem-lösning			
		E	C	A	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4		
B	1a	1	0	0									X									
	1b	1	0	0											X							
	2a	1	0	0		X	X															
	2b	1	0	0	X	X	X															
	3	1	0	0												X						
	4a	1	0	0	X		X															
	4b	1	0	0	X																	
	5a	0	1	0								X										
	5b	0	1	0								X										
	6	0	1	0					X									X				
	7	0	1	0									X									
	8	0	0	1	X	X		X														
9	0	0	1						X					X								
10	0	0	1											X			X					
C	11	2	0	0	X																	
	12	2	1	0							X											
	13	2	0	0						X		X										
	14	2	1	0							X				X		X					
	15	0	3	0										X								
	16	0	2	0												X						
	17	0	1	1											X		X					
	18	0	0	2						X		X										
	19	0	0	2						X			X		X			X				
	20	0	0	2										X								
D	21	2	0	0	X	X	X															
	22	2	0	0												X		X	X			
	23	2	1	0												X		X				
	24a	1	0	0									X									
	24b	0	2	0							X		X									
	25	0	3	0											X			X				
	26	0	2	2											X			X	X			
	27	0	1	2												X		X	X			
	28	0	1	3											X							
Total		22	22	17																		

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 22 E-, 22 C- och 17 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget

- E: 15 poäng
- D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
- C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
- B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
- A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev: _____ Klass: _____ Provbetyg: _____

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3												
	4a												
	4b												
	5a												
	5b												
	6												
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
	16_1												
	16_2												
	17_1												
	17_2												
	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20_1												
	20_2												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	21_1												
	21_2												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24a												
	24b_1												
	24b_2												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	26_4												
	27_1												
	27_2												
	27_3												
	28_1												
	28_2												
	28_3												
	28_4												
Total													
Σ													

	Total	6	7	7	2	3	5	9	5	2	2	7	6
Σ	61	22				22				17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

- | | |
|---|--------------------|
| 1. | Max 2/0/0 |
| a) Korrekt svar (8) | +1 E _B |
| b) Korrekt svar ($f'(x) = 20 \cos 4x$) | +1 E _P |
| 2. | Max 2/0/0 |
| a) Godtagbart markerad punkt ($2 - 3i$) | +1 E _B |
| b) Korrekt svar (13) | +1 E _B |
| 3. | Max 1/0/0 |
| Godtagbart svar (2) | +1 E _B |
| 4. | Max 2/0/0 |
| a) Korrekt svar (3,5) | +1 E _B |
| b) Korrekt svar $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ | +1 E _B |
| 5. | Max 0/2/0 |
| a) Korrekt svar (D, A och C) | +1 C _B |
| b) Godtagbart svar ($y = \sin \frac{x}{2}$) | +1 C _B |
| 6. | Max 0/1/0 |
| Korrekt svar (5) | +1 C _{PL} |

7. **Max 0/1/0**
 Godtagbart skissad graf +1 C_B
Se avsnittet Bedömda elevlösningar. 
8. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (t ex $\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ$) +1 A_B
9. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (Alternativ C: 0,5) +1 A_B
10. **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (t ex $f(x) = 2(x^2 + 1)^6$) +1 A_{PL}

Delprov C

11. **Max 2/0/0**
 Godtagbar ansats, förlänger med nämnarens konjugat +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($4 + i$) +1 E_P
12. **Max 2/1/0**
 Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen korrekt +1 E_P
 med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen korrekt, t ex $x = 20^\circ + n \cdot 120^\circ$ +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar +1 C_P
 ($x = 20^\circ + n \cdot 120^\circ$ och $x = 40^\circ + n \cdot 120^\circ$)
13. **Max 2/0/0**
 Godtagbar ansats, t ex skriver om täljaren med trigonometriska ettan +1 E_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



14.

Max 2/1/0

Godtagbar ansats, t ex tecknar en ekvation för bestämning av a ,

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \frac{1}{2}$$

+1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{\pi}{6}\right)$

+1 E_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4

+1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



15.

Max 0/3/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatan korrekt,

$$I'(p) = 2000(1 - 0,05p)e^{-0,05p}$$

+1 C_P

med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer derivatans nollställe, $p = 20$

+1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning, inklusive verifiering av maximum, med korrekt slutsats ("Ja, 20 kr")

+1 C_R

16.

Max 0/2/0

Godtagbar ansats, visar att Parhams *eller* Aidas förslag är en lösning till differentialekvationen

+1 C_R

med i övrigt välgrundat resonemang som stödjer slutsatsen att ingen har fel

+1 C_R

17.

Max 0/1/1

Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt integral med gränser,

$$\int_0^{\sqrt{h}} (h - x^2) \, dx$$

+1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (4)

+1 A_{PL}

18.

Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex gör omskrivningen

$$\sin 345^\circ = -\sin 15^\circ = -\sin(45^\circ - 30^\circ)$$

+1 A_R

med i övrigt godtagbart slutfört bevis

+1 A_R

19. Max 0/0/2

Godtagbar ansats, skriver om exponenten med formeln för dubbla vinkeln +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($e^{-\frac{1}{2}}$) +1 A_{PL}

20. Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex resonerar korrekt om vad som skiljer graferna för stora x +1 A_R

med ett i övrigt välgrundat och nyanserat resonemang som leder till korrekt slutsats ($f_1: A$, $f_2: C$, $f_3: D$, $f_4: B$) +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



Delprov D

21. Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $|z|$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($z = 5(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)$) +1 E_P

22. Max 2/0/0

Godtagbar ansats, anger att totala regnmängden bestäms av $\int_0^{10} x \sin \frac{\pi x}{10} dx$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (32 mm) +1 E_M

23. Max 2/1/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer x -koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna, $x \approx 0,9197$ +1 E_{PL}

med korrekt tecknat uttryck för bestämning av någon relevant area,

t ex $\int_{0,5}^{0,9197} (4x - 2) dx$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,06 a.e.) +1 C_{PL}

24.

Max 1/2/0

- a) Godtagbart lösning med godtagbart svar (35 %) +1 E_M
- b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation eller olikhet +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,0 h) +1 C_M

25.

Max 0/3/0

- Godtagbar ansats, bestämmer en primitiv funktion till $f''(x)$ +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar
 $(f'(x) = \sin x + \frac{\cos 2x}{2} + 1,5)$ +1 C_{PL}
 Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

26.

Max 0/2/2

- Godtagbar ansats, ställer upp kedjeregeln och identifierar $\frac{dV}{dr}$ eller $\frac{dr}{dt}$,
 t ex $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot 3,5$ +1 C_M
 med godtagbar fortsättning, beräknar $\frac{dV}{dt}$, 1583 cm³/s +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,5 s) +1 A_M
 Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

27.

Max 0/1/2

- Godtagbar ansats, ställer upp en integral för bestämning av någon relevant
 volym, t ex $\int_0^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{2} \right)^2 dx$ +1 C_M
 med godtagbar fortsättning, t ex ställer upp korrekt uttryck för de integraler
 som behövs för att bestämma glasmassans volym,
 $\int_0^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{2} \right)^2 dx$ och $\int_{0,25}^3 \pi \left(\frac{\sqrt{2x-0,5}}{2} \right)^2 dx$ +1 A_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,5 dm³) +1 A_M

28.

Max 0/1/3

Godtagbar ansats, bestämmer $h''(0)$ för ett specialfall *eller*

bestämmer $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$

+1 C_P

med godtagbar fortsättning,

bestämmer $h''(x) = 2f'(x) \cdot f'(x) + 2f(x) \cdot f''(x)$

+1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (14)

+1 A_P

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4

+1 A_K

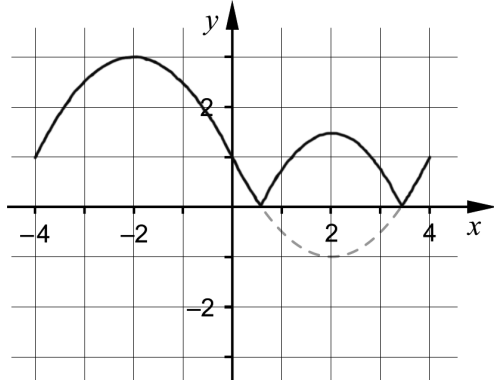
Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



Bedömda elevlösningar

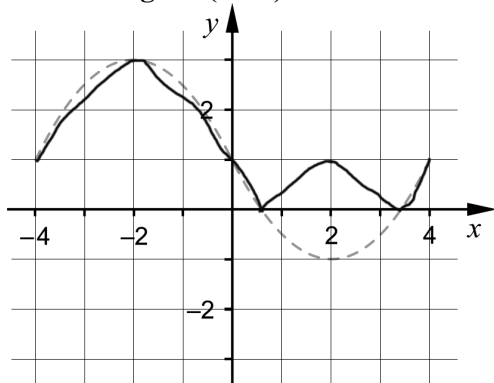
Uppgift 7.

Elevlösning 7.1 (0 poäng)



Kommentar: Skissen är snyggt ritad men i intervallet runt $x = 2$ avviker den för mycket från den korrekta kurvan och från punkten $(2, 1)$. Därmed ges lösningen noll poäng.

Elevlösning 7.2 (1 C_B)



Kommentar: Skissen är något kantig men visar i grova drag hur den korrekta grafen ser ut. Lösningen anses nått och jämnt uppfylla kraven för begrepps-poäng på C-nivå.

Uppgift 13.

Elevlösning 13.1 (1 E_R)

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \tan x$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 - \cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x \cos x$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x \quad \text{trig. ettan.}$$

$$\sin^2 x = \sin^2 x$$

$$VL = HL \quad VSV.$$

Kommentar: Elevlösningen bygger från och med rad 3 på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 14.

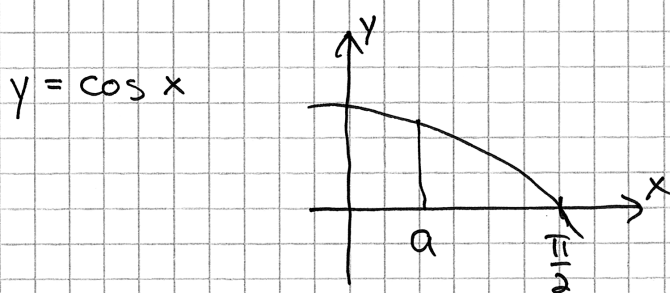
Elevlösning 14.1 (2 E_{PL})

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_x^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin x = 1 - \sin x$$

$$a = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - 0,5 = 0,5 = \frac{1}{2} \text{ a.e.}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en förenkling av integralen och en bestämning av värdet på a . Att värdet är korrekt verifieras sedan. Detta gör att lösningen uppfyller kraven för de båda problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation så har lösningen några brister, x används i två betydelser på rad 1, $a = \pi/6$ konstateras utan motivering och svar saknas. Dessa brister gör att lösningen inte anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 14.2 (1 E_{PL} och 1 C_K)

Bestäm a så att områdets area blir $\frac{1}{2}$ a.e.

$$\int_a^{\pi/2} (\cos x) dx = \left[\sin x \right]_a^{\pi/2}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(a) = 0,5$$

$$\sin(a) = 1 - 0,5$$

$$a = \sin^{-1}(0,5)$$

$$\text{Svar: } a = \frac{5\pi}{6} \text{ eller } a = \frac{\pi}{6}$$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt fram till slutet då två alternativa värden på a ges i svaret. Det gör att lösningen inte uppfyller kraven för den andra problemlösningspoängen. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå och det matematiska språket i huvudsak korrekt. Det felaktiga svaret anses inte påverka bedömningen av kommunikationen. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng på E-nivå och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 20.

Elevlösning 20.1 (2 AR)

För större värden på x , kommer x -termen resp. $3x$ -termen att dominera. $y = 3x$ ger brantare lutning än $y = x$, och vi ser att $B \circ C$ har brantare lutning än $A \circ D$ vid större x .

Dessa tillhör då $f_2 \circ f_4$. $3x$ -termen kommer börja dominera vid lägre x för f_4 än för f_2 , då $\frac{1}{3x}$ blir litet vid ett lägre x än $\frac{1}{x}$. Därför är B f_4 och C f_2 .

Då kommer $A \circ D$ tillhöra $f_1 \circ f_3$, och vi ser också att deras grafer är mindre branta när x -termen dominerar. Samma resonemang om $\frac{1}{x}$ -termen $\circ \frac{1}{3x}$ -termen gäller för dessa funktioner, och vi får att A är f_1 , och D är f_3 .

Svar: $A - f_1$, $B - f_4$, $C - f_2$, $D - f_3$

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som på ett entydigt sätt visar hur varje funktion hänger ihop med respektive graf. Även om lösningen innehåller någon del som inte är helt välformulerad, ”då $\frac{1}{3x}$ blir litet vid ett lägre x än $\frac{1}{x}$ ”, bedöms lösningen uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 20.2 (2 A_R)

De som lutar starkast upp är de som

har $y = \frac{1}{bx} + x \cdot 3$, alltså B och C.

Det ges då också att de andra är de
med $y = \frac{1}{bx} + x$.

De som går långt ned är de som har ett
litet värde av $\frac{1}{bx}$. Insättning av 0,5 ger

$$\text{att } \frac{1}{0,5} = 2 \quad \frac{1}{3 \cdot 0,5} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} < 2 \quad \text{ger att}$$

$$A = f_1$$

$$C = f_2$$

$$D = f_3$$

$$B = f_4$$

Kommentar: Lösningen innehåller ett korrekt resonemang som identifierar varje funktions graf. Trots att lösningen innehåller något vaga formuleringar såsom "lutar starkast upp" och "som går långt ned" bedöms kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 25.

Elevlösning 25.1 (1 C_P och 1 C_{PL})

$$\begin{aligned}
 y &= 1 & x &= 0 & f''(x) &= \cos x - \sin 2x \\
 f'(x) &= 2 & f' &= \sin x + \frac{\cos 2x}{2} + C \\
 f'(0) &= 2 = \sin 0 + \frac{\cos 2 \cdot 0}{2} + C = \frac{1}{2} + C \\
 \Rightarrow C &= 1,5 \Rightarrow f'(x) &= \sin x + \frac{\cos 2x}{2} + 1,5
 \end{aligned}$$

Kommentar: I elevlösningen bestäms $f'(x)$ korrekt vilket ger procedur- och problemlösningspoängen på C-nivå. När det gäller kommunikation skrivs felaktigt $f'(x) = 2$. På rad 3 används likhetstecken på ett ostrukturerat sätt och förklaring saknas till varför $f'(0) = 2$. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoängen på C-nivå inte anses vara uppfyllda.

Elevlösning 25.2 (1 C_P, C_{PL} och 1 C_K)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \cos(x) - \sin(2x) \Rightarrow \\
 f'(0) &= 2 & f'(x) &= \sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2} + C \Rightarrow \\
 f(0) &= 1 & f(x) &= -\cos(x) + \frac{\sin(2x)}{4} + Cx + D \\
 & & f(0) &= -1 + 0 + 0 + D = 1 \\
 & & \Rightarrow D &= 2 \\
 & & f'(0) &= 0 + \frac{1}{2} + C = 2 \\
 & & \Rightarrow C &= 1,5 \\
 & & f'(x) &= \sin(x) + \frac{\cos(2x)}{2} + 1,5
 \end{aligned}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av $f'(x)$. När det gäller kommunikation saknas förklaring till varför $f'(0) = 2$ och en onödig bestämning av $f(x)$ görs på rad 3–5. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nått och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 26.

Elevlösning 26.1 (2 C_M och 1 A_M)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad r' = 3,5 \text{ cm/s} = 0,35 \text{ dm/s}$$

$$V' = \frac{4\pi 3r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$V' = 4\pi r^2 \cdot r' \\ = 4\pi \cdot 0,6^2 \cdot 0,35 = 1,583 \text{ dm}^3/\text{s}$$

Konstant hastighet $\rightarrow V' = \frac{V}{t} \rightarrow t = \frac{V}{V'}$

$$t = \frac{V}{V'} = \frac{5,5 \text{ dm}^3}{1,583 \text{ dm}^3/\text{s}} = \underline{\underline{3,47 \text{ s}}}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av den efterfrågade tiden. När det gäller kommunikation används beteckningen V' för såväl $\frac{dV}{dr}$ som $\frac{dV}{dt}$ vilket medför att lösningen inte är helt lätt att följa och förstå. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösning 26.2 (2 C_M, 1 A_M och 1 A_K)

$$V = 5,5 \text{ liter} \quad \frac{dr}{dt} = 3,5 \text{ cm/s} = 0,35 \text{ dm/s}$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{då } r = 0,6 \text{ dm}$$

$$\text{liter} = \text{dm}^3$$

$$\frac{dV}{dr} = V' = \frac{3 \cdot 4\pi r^2}{3} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot 0,6^2 \cdot 0,35 = 1,58 \text{ liter/s}$$

Konstant hastighet: $V = \frac{dV}{dt} \cdot t$

$$t = \frac{5,5}{1,58} = \underline{\underline{3,47 \text{ s}}}$$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt. När det gäller kommunikation används symboler och beteckningar korrekt. Det saknas förklarande text vilket gör lösningen något otydlig men trots denna brist anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå nått och jämnt vara uppfyllda. Elevlösningen ges samtliga möjliga poäng.

Uppgift 28.

Elevlösning 28.1 (1 Cp)

$$f(0) = -1 \quad f(x) = x^2 + 3x - 1 \quad \rightarrow \quad f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3 \quad f'(x) = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad f'(0) = 3$$

$$f''(0) = 2 \quad f''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad f''(0) = 2$$

$$h(x) = (f(x))^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$$

$$h'(x) = (2 \cdot (2x + 3))(x^2 + 3x - 1)$$

$$(4x + 6)(x^2 + 3x - 1) = 4x^3 + 12x^2 - 4x + 6x^2 + 18x - 6 =$$

$$4x^3 + 18x^2 + 14x - 6$$

$$h''(x) = 12x^2 + 36x + 14$$

$$h''(0) = 14$$

$$\underline{\text{Svar: } 14}$$

Kommentar: Elevlösningen utgår från ett specialfall som uppfyller de givna villkoren och innehåller en godtagbar redovisning av hur $h''(0)$ beräknas för detta specialfall. Detta anses motsvara en godtagbar ansats. Lösningen uppfyller därmed kraven för procedurpoängen på C-nivå.

Elevlösning 28.2 (1 Cp och 2 Ap)

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3$$

$$f''(0) = 2$$

$$h(x) = (f(x))^2$$

$$h'(x) = f$$

$$h(x) = f(x) \cdot f(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x)$$

$$= 3 \cdot -1 + 3 \cdot (-1)$$

$$= -3 - 3 = -6 \quad (\text{om det slutat})$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f(x) = 2 f'(x) \cdot f(x)$$

$$h''(x) = f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f''(x) \cdot f(x)$$

$$h''(0) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)$$

$$= 9 + (-2) + 9 + (-2) = 14$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $h''(0)$ för en generell funktion vilket uppfyller kraven för de tre procedurpoängen. När det gäller kommunikation innehåller lösningen ovidkommande och felaktig information på femte och sjunde raden som sedan inte används. Efter bestämningen av $h'(x)$ övergår detta till en ovidkommande bestämning av $h'(0)$ utan att beteckningen ändras. Dessa brister gör att lösningen inte blir helt lätt att följa och förstå och att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå ej anses vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på C-nivå och två procedurpoäng på A-nivå.

Elevlösning 28.3 (1 C_p, 2 A_p och 1 A_k)

$$h(x) = (f(x))^2$$

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = 3$$

$$h'(x) = 2(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$f''(0) = 2$$

$$h''(x) = 2 \cdot (f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x))$$

$$h''(0) = 2 \cdot (3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2)$$

$$h''(0) = 2 \cdot 7$$

$$h''(0) = 14$$

Kommentar: Elevlösningen utgår från en generell funktion och $h''(0)$ bestäms korrekt. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå och det matematiska språket är korrekt. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive kommunikationspoängen på A-nivå.