

### Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	E	C	A	Max
<p><b>Fullständighet, relevans och struktur</b></p> <p>Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.</p>	<p>Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande.</p> <p>Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår.</p> <p>Redovisningen är välstrukturerad.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b>Beskrivningar och förklaringar</b></p> <p>Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.</p>	<p>Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar.</p> <p>Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b>Matematisk terminologi</b></p> <p>Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen.</p> <p>(1/0/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen.</p> <p>(1/1/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen.</p> <p>(1/1/1)</p>	(1/1/1)
<b>Summa</b>				(3/1/3)

## Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning .....	3
Bedömningsanvisningar .....	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga .....	4
Provsammanställning – Kunskapskrav .....	5
Provsammanställning – Centralt innehåll .....	6
Kravgränser .....	7
Resultatsammanställning .....	7
Bedömningsformulär .....	8
Bedömningsanvisningar .....	9
Delprov B .....	9
Delprov C .....	11
Delprov D .....	12
Bedömda elevlösningar .....	15
Uppgift 3 .....	15
Uppgift 11 .....	16
Uppgift 12 .....	17
Uppgift 14 .....	18
Uppgift 15 .....	19
Uppgift 18 .....	20
Uppgift 19d .....	21
Uppgift 21 .....	22
Uppgift 22 .....	23
Uppgift 23 .....	25
Uppgift 24a .....	28
Ur ämnesplanen för matematik .....	29
Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c .....	30
Centralt innehåll Matematik kurs 3c .....	31

## Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att  $E_{PL}$  och  $A_R$  ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

### Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

#### Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 $E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 $E_P$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

#### Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 $E_R$	1 $E_R$ och 1 $C_R$	1 $E_R$ , 1 $C_R$ och 1 $A_R$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

**Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga**

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå ( $C_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå ( $A_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. =, $\neq$ , $<$ , $>$ , $\leq$ , $\geq$ , $\approx$ , $\pm$ , $\sqrt{\quad}$ , $f(x)$ , $f'(x)$ , $f''(x)$ , $x$ , $y$ , $(\quad)$ , $[\quad]$ , $\int dx$ , bråkstreck, index, lim, VL, HL, symbol för vinkel, gradtecken
Termer	t.ex. absolutbelopp, cirkel, enhetscirkel, polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andra-derivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, cirkelns ekvation, enhetscirkeln, areasatsen, cosinussatsen, sinussatsen, definitionen för sinus
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

## Provsammanställning – Kunskapskrav

**Tabell 1** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 19b\_1 och 19b\_2 den första respektive andra poängen i uppgift 19b.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå															
		E				C				A							
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK				
A	M_1				1												
	M_2																1
	M_3				1												
	M_4																1
	M_5				1												
	M_6								1								
	M_7																1
B	1	1															
	2		1														
	3a	1															
	3b	1															
	4a		1														
	4b						1										
	4c						1										
	5a		1														
	5b						1										
	6	1															
	7a	1															
	7b						1										
	8						1										
	9a		1														
	9b						1										
	9c										1						
	10a						1										
10b										1							
C	11_1				1												
	11_2				1												
	12_1		1														
	12_2		1														
	12_3		1														
	12_4								1								
	13_1						1										
	13_2						1										
	14_1								1								
	14_2								1								
	14_3								1								
	15_1												1				
	15_2												1				
	16_1										1						
	16_2										1						

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå															
		E				C				A							
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK				
D	17_1				1												
	17_2				1												
	18								1								
	19a				1												
	19b_1				1												
	19b_2				1												
	19c_1								1								
	19c_2								1								
	19d_1											1					
	19d_2											1					
	20_1											1					
	20_2											1					
	21_1											1					
	21_2											1					
	21_3												1				
	22_1																1
	22_2																1
	22_3																1
	23_1														1		
	23_2																1
	23_3																1
	23_4																1
	24a_1																1
	24a_2																1
24b																1	
<b>Total</b>		<b>5</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>7</b>				
<b>Σ</b>	<b>65</b>	<b>23</b>				<b>23</b>				<b>19</b>							

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation



## Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 65 poäng varav 23 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget

E: 17 poäng

D: 26 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 34 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 44 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

# Bedömningsformulär

Elev: \_\_\_\_\_ Klass: \_\_\_\_\_ Provbetyg: \_\_\_\_\_

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2												
	3a												
	3b												
	4a												
	4b												
	4c												
	5a												
	5b												
	6												
	7a												
	7b												
	8												
	9a												
	9b												
	9c												
	10a												
10b													
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	12_4												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
16_2													

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1												
	17_2												
	18												
	19a												
	19b_1												
	19b_2												
	19c_1												
	19c_2												
	19d_1												
	19d_2												
	20_1												
	20_2												
	21_1												
	21_2												
	21_3												
	22_1												
	22_2												
	22_3												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24a_1												
	24a_2												
24b													
<b>Total</b>													
<b>Σ</b>													


	<b>Total</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>7</b>
<b>Σ</b>	<b>65</b>	<b>23</b>				<b>23</b>				<b>19</b>			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Delprov B

- |   |   |
|---|---|
| <b>1.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar (-4)   | +1 E <sub>B</sub>   |
| <b>2.</b>   | <b>Max 1/0/0</b>  |
| Korrekt svar $\left(\frac{8}{3}\right)$                     | +1 E <sub>P</sub>   |
| <b>3.</b>   | <b>Max 2/0/0</b>  |
| a) Godtagbart ritad tangent                                 | +1 E <sub>B</sub>   |
| b) Godtagbart ritad sekant som skär grafen i två punkter    | +1 E <sub>B</sub>   |
| <i>Se avsnittet Bedömda elevlösningar.</i>                  |  |
| <b>4.</b>   | <b>Max 1/2/0</b>  |
| a) Korrekt svar ( $f'(x) = 15x^2 - 16x$ )                   | +1 E <sub>P</sub>   |
| b) Korrekt svar $\left(f'(x) = \frac{3 - e^{-x}}{2}\right)$ | +1 C <sub>P</sub>   |
| c) Korrekt svar ( $f'(x) = x^{-1,5}$ )                      | +1 C <sub>P</sub>   |
| <b>5.</b>   | <b>Max 1/1/0</b>  |
| a) Korrekt svar (1,5)                                       | +1 E <sub>P</sub>   |
| b) Korrekt svar (-0,5)                                      | +1 C <sub>B</sub>   |

- 6.** **Max 1/0/0**  
 Godtagbart ritad graf  
 (Markering av punkterna (1, 1), (2, 4) och (3, 9)) +1 E<sub>B</sub>
- 7.** **Max 1/1/0**  
 a) Korrekt svar (G) +1 E<sub>B</sub>  
 b) Korrekt svar (H) +1 C<sub>B</sub>
- 8.** **Max 0/1/0**  
 Korrekt svar (Alternativ E) +1 C<sub>B</sub>
- 9.** **Max 1/1/1**  
 a) Korrekt svar (3) +1 E<sub>P</sub>  
 b) Korrekt svar  $\left(\frac{x-3}{2(x+3)}\right)$  +1 C<sub>P</sub>  
 c) Korrekt svar  $((x-1)^{12})$  +1 A<sub>P</sub>
- 10.** **Max 0/1/1**  
 a) Korrekt svar (C) +1 C<sub>B</sub>  
 b) Korrekt svar (B, D och E) +1 A<sub>B</sub>

**Delprov C****11. Max 2/0/0**

Godtagbar inledning till resonemang, t.ex. sätter  $x = 10$  och  $y = 6$  i cirkelns ekvation +1 E<sub>R</sub>

med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med slutsatsen att punkten inte ligger på cirkeln +1 E<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**12. Max 3/1/0**

Godtagbar ansats, deriverar och tecknar ekvationen  $3x^2 - 12x + 9 = 0$  +1 E<sub>P</sub>

med korrekt bestämning av derivatans nollställen,  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 3$  +1 E<sub>P</sub>

med godtagbar verifiering, t.ex. verifiering av maximum då  $x_1 = 1$  och uteslutning av nollstället  $x_2 = 3$  med korrekt svar ( $x = 1$ ) +1 E<sub>P</sub>

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**13. Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion,  $\frac{x^4}{16} + \frac{x}{4}$  +1 C<sub>P</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1,5 a.e.) +1 C<sub>P</sub>

*Kommentar:* Svar med utelämnad eller felaktig enhet godtas.

**14. Max 0/3/0**

Godtagbar generell ansats, där två relevanta areor beräknas, t.ex.

$\int_0^a kx^2 dx = \frac{ka^3}{3}$  och  $a \cdot ka^2 = ka^3$  +1 C<sub>R</sub>

med godtagbart slutfört bevis +1 C<sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



15. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, skriver om nämnaren som  $(x-1)(x+3)$  och inser att en av faktorerna  $(x-1)$  eller  $(x+3)$  ska finnas i täljaren  $x^2 - ax - 12$  +1 A<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $a_1 = -11$  och  $a_2 = 1$ ) +1 A<sub>PL</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



16. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = y'(0)$  +1 A<sub>B</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $\ln 3$ ) +1 A<sub>P</sub>

### Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, bestämmer ett allmänt uttryck för den primitiva funktionen,  $F(x) = 0,25x^4 + x^3 + C$  +1 E<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $F(x) = 0,25x^4 + x^3 - 5$ ) +1 E<sub>PL</sub>

18. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang, där det framgår att  $|-12+2| + 0,5 \cdot (-12) = 4$ , med slutsatsen att Lisa har fel +1 E<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 19.** **Max 3/4/0**
- a) Godtagbar lösning med korrekt svar (22 °C) +1 E<sub>M</sub>
- b) Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen  $17e^{-0,693x} + 5 = 10$  +1 E<sub>M</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,8 h) +1 E<sub>M</sub>
- c) Godtagbar ansats, visar insikt om att funktionen ska deriveras +1 C<sub>B</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar inklusive korrekt enhet (2,9 °C/h) +1 C<sub>B</sub>
- Kommentar:* Svaret -2,9 °C/h bedöms som godtagbart.
- d) Godtagbar ansats, t.ex. ansätter några värden på  $x$  i funktionsuttrycket +1 C<sub>M</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (5 °C) +1 C<sub>M</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 20.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. deriverar och tecknar ekvationen  $4x^3 - 4 = -17,5$  +1 C<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-1,5) +1 C<sub>PL</sub>

- 21.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, tecknar en användbar ekvation med hjälp av cosinussatsen +1 C<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,9 h) +1 C<sub>PL</sub>  
 Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



**22. Max 0/0/3**

Godtagbar generell ansats, ansätter två sidor med olika längder och lämpliga vinklar samt använder areasatsen i två trianglar +1 A<sub>R</sub>

med i övrigt korrekt slutfört bevis inklusive hänvisning till sambandet  $\sin v = \sin(180^\circ - v)$  +1 A<sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**23. Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att  $\int 5,73e^{0,0573t} dt$  kan användas +1 A<sub>B</sub>

med godtagbar fortsättning, tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då  $t = 0$ , t.ex. genom att teckna ekvationen  $100 + \int_0^x 5,73e^{0,0573t} dt = 100000$  +1 A<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (120 min) +1 A<sub>PL</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A<sub>K</sub>

*Kommentar:* Observera att vissa felaktiga lösningar,

t.ex.  $\int_0^x 5,73e^{0,0573t} dt = 100000$  också ger svaret 120 minuter.

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*

**24. Max 0/0/3**

a) Godtagbar ansats, funktionsuttrycket innehåller faktorn  $30 \cdot 0,98^x$  +1 A<sub>M</sub>

med korrekt svar ( $D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$ ) +1 A<sub>M</sub>

b) Godtagbar grafisk lösning, där det korrekta funktionsuttrycket  $D(x) = (40 + x)(30 \cdot 0,98^x)$  används, med godtagbart svar (49,50 kr/kg) +1 A<sub>M</sub>

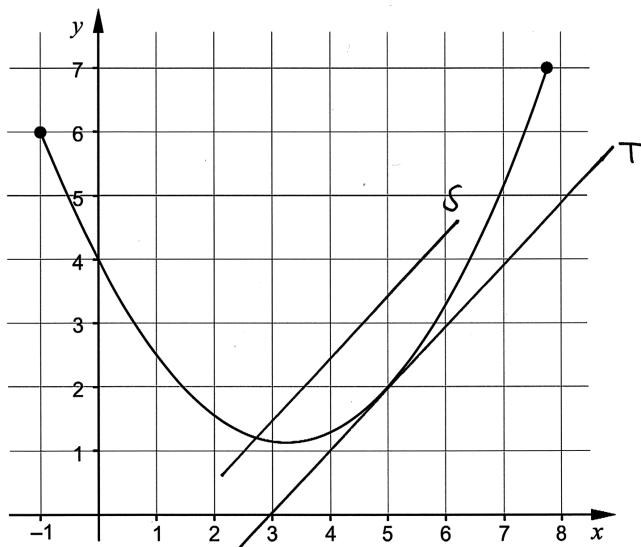
*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



## Bedömda elevlösningar

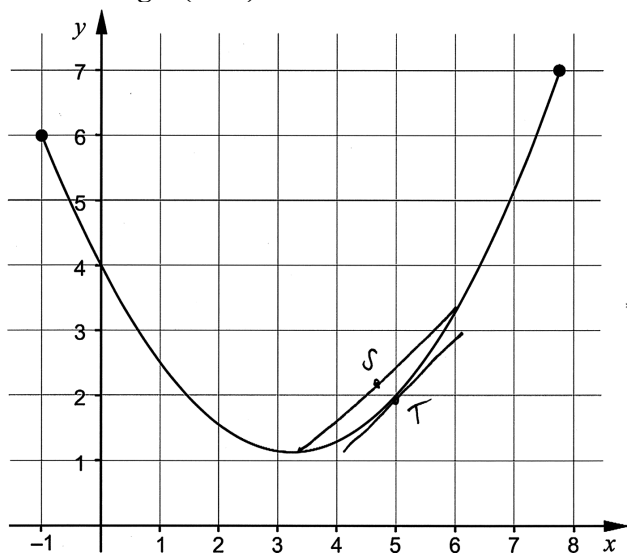
### Uppgift 3

#### Elevlösning 1 (1 E<sub>B</sub>)



*Kommentar:* a) Tangenten är godtagbart ritad, vilket ger en begreppsöäng på E-nivå.  
 b) Sekanten uppfyller inte kraven för en begreppsöäng på E-nivå eftersom den inte skär grafen i två punkter.

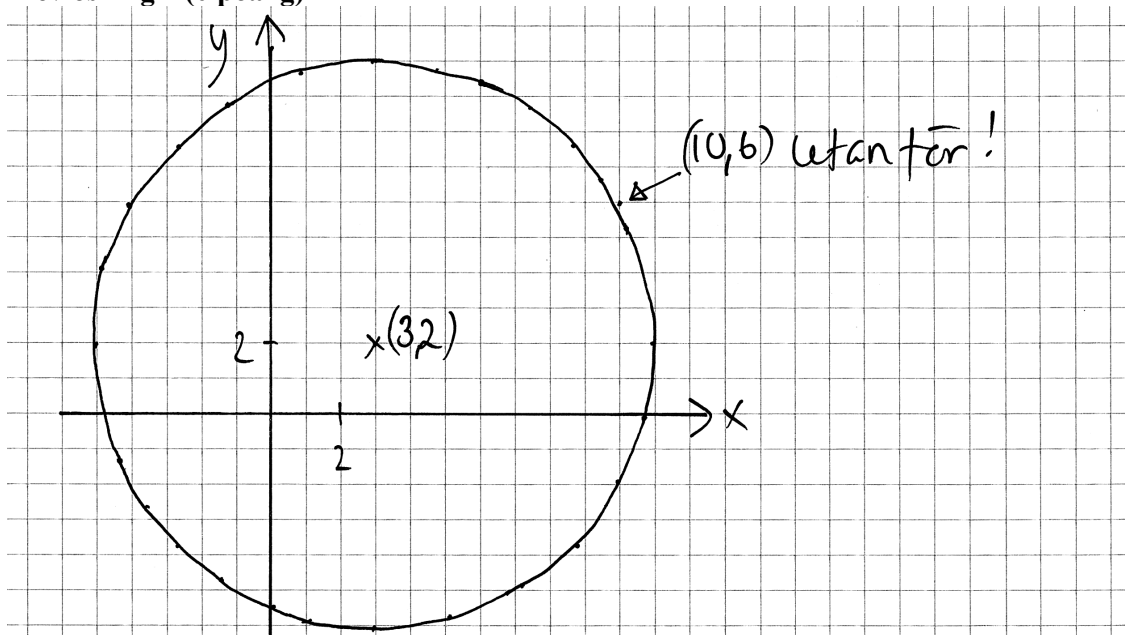
#### Elevlösning 2 (2 E<sub>B</sub>)



*Kommentar:* Tangenten och framförallt sekanten borde ha varit längre och lutningen är inte riktigt 1. Trots detta bedöms lösningen nätt och jämnt ge två begreppsöäng på E-nivå.

## Uppgift 11

## Elevlösning 1 (0 poäng)



*Kommentar:* Elevlösningen visar en noggrant ritad figur, men en figur anses inte vara tillräcklig för att avgöra om punkten ligger på cirkeln eller inte. Lösningen ges 0 poäng.

## Elevlösning 2 (1 ER)

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 64 \\ (10-3)^2 + (6-2)^2 &= 64 && \text{Nej, den ligger} \\ (100-9) + (36-4) &= 64 && \text{inte på cirkeln!} \\ 91 + 32 &\neq 64 \end{aligned}$$

*Kommentar:* Lösningen visar en godtagbar ansats där  $x = 10$  och  $y = 6$  ansätts i ekvationen men sedan följer ett räknefel. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

## Elevlösning 3 (2 ER)

$$\begin{aligned} (10-3)^2 + (6-2)^2 &= 64 \Rightarrow \\ 7^2 + 4^2 &= 64 \Rightarrow \\ 49 + 16 &= 65 = 64 \text{ Falskt} \\ \text{Nej, det går den inte} \end{aligned}$$

*Kommentar:* Lösningen visar ett godtagbart enkelt resonemang trots formella brister. Sammantaget ges lösningen nätt och jämnt två resonemangspoäng på E-nivå.

## Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E<sub>P</sub> och 1C<sub>K</sub>)

$$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$V_{\max}$  finns där  $V'(x) = 0$

$$V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{pq-formeln ger vidare att}$$

$$\Rightarrow x = -\left(-\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 1 = 3 \text{ dm}$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1 \text{ dm}$$

$x_1$  ger att sidan  $x = 3 \text{ dm}$  vilket är orimligt då detta är den kvadratiske plåtens sida.

På  $x = 1$  finns  $V_{\max}$  i  $x = 1$ . Sidan ska vara 1 dm för att bålet ska bli så stort som möjligt.

Svar: 1 dm

*Kommentar:* I elevlösningen motiveras varför  $x = 3 \text{ dm}$  är orimligt men verifiering av att  $x = 1 \text{ dm}$  motsvarar ett maximum saknas, vilket gör att kraven för tredje procedurpoängen på E-nivå inte är uppfyllda. När det gäller kommunikation är uppgiften i det närmaste behandlad i sin helhet och redovisningen är mycket lätt att följa och förstå samt symboler används med god anpassning till syfte och situation. Därmed anses kraven för kommunikationspoängen på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges elevlösningen två procedurpoäng på E-nivå och kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (3 E<sub>P</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

Sökes: Största möjliga volym

Givet: Sidan är 3 dm

$$V(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Lösning:  $V'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$V'(x) = 0 \text{ ger } 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$$

$$(x_1 = 3) \quad x_2 = 1$$

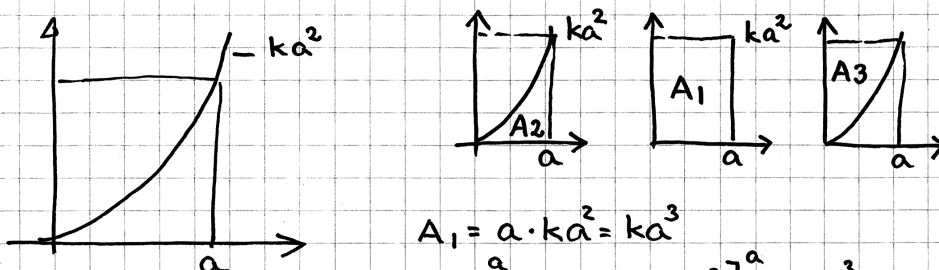
$$V''(x) = 6x - 12$$

$$V''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 \quad V(1) \text{ max}$$

Svar  $x = 1$

*Kommentar:* Uppgiften är löst i sin helhet inklusive uteslutning av  $x = 3$  och verifiering av maximum. När det gäller kommunikation är lösningen strukturerad och möjlig att följa och förstå trots att motiveringen till varför  $x = 1$  ger ett maximum är ofullständig. Elevlösningen ges tre procedurpoäng på E-nivå samt nått och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå

## Uppgift 14

Elevlösning 1 (1 C<sub>R</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$A_1 = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_2 = \int_0^a kx^2 dx = \left[ \frac{kx^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

Om  $A_2 + A_3$  ska vara lika med  $A_1$  så

$$\text{måste } A_3 = \frac{2ka^3}{3}$$

*Kommentar:* Relevanta areor beräknas korrekt men bevisföringen är inte helt slutförd eftersom en slutsats av typen "dvs  $A_3 = 2A_2$ " saknas. Även om beviset inte är helt fullständigt så är lösningen välstrukturerad och lätt att följa och förstå. Matematiska symboler används korrekt och figurerna förtydligar lösningen. Elevlösningen ges en resonemangs- och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C<sub>R</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$$A_{vit} = \int_0^a (kx^2) dx = \left[ \frac{kx^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^3}{3}$$

$$y = ka^2$$

$$A_{rek} = a \cdot ka^2 = ka^3$$

$$A_{gr\ddot{a}} = ka^3 - \frac{ka^3}{3} = \frac{2ka^3}{3}$$

$$A_{gr\ddot{a}} = 2 \cdot A_{vit}$$

$$\frac{2ka^3}{3} = 2 \cdot \frac{ka^3}{3} \quad \text{v. s. B.}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett godtagbart bevis. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Visserligen saknas figur men detta kompenseras av användningen av index. Elevlösningen ges två resonemangspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 15

## Elevlösning 1 (0 poäng)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - ax - 12}{(x-1)(x+3)}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{och} \quad x_2 = -3$$

*Kommentar:* Nämnaren faktoriseras korrekt men det framgår inte att faktorerna även ska finnas i täljaren för att förkortning ska vara möjlig. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 A<sub>PL</sub>)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Man kan inte använda några kvadreringsregler eftersom det är - framför 12 och 3.

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

För att det ska bli 12 måste man ha med 4 och 3 i parenteserna.

$$(x+3)(x-4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$$

Detta gör att om  $a=1$  kan man förenkla uttrycket.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-4}{x-1} \quad \text{Svar: } a=1$$

*Kommentar:* I elevlösningen faktoriseras nämnaren och det ena värdet på  $a$  bestäms. Elevlösningen ges en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (2 A<sub>PL</sub>)

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 - 4x + 3x - 12}{x^2 - x + 3x - 3} = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Förkortning möjlig

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

svar  $a_1 = 1$   
 $a_2 = 11$

$$\frac{x^2 - ax - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+12)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 12x - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x^2 - 11x - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Förkortning möjlig

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt förutom ett lapsusfel i sista ledet. Elevlösningen ges två problemlösningspoäng på A-nivå.

## Uppgift 18

## Elevlösning 1 (0 poäng)

$$|x + 2| + 0.5x = 5$$

LISA HAR FEL.  $(-12 + 2) + (-6) = 5$

$$(-10) + (-6) = 5$$

$$10 - 6 = 4$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett resonemang som inte bedöms som godtagbart eftersom parentes används istället för absolutbeloppstecken på andra och tredje raden. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (1 E<sub>R</sub>)

$$|-12 + 2| + 0.5 \cdot (-12) = 5$$

$$|-10| + (-6) = 5$$

$$10 - 6 = 4 \neq 5 \quad \text{Hon har fel!!!}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett resonemang som på de två första raderna inte är formellt korrekt eftersom  $VL \neq HL$ . Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E<sub>R</sub>)

Nej, eftersom  $|-12 + 2| = 10$  och

$$10 + 0.5 \cdot (-12) = 10 - 6 = 4$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar ett något kortfattat resonemang som nätt och jämnt bedöms uppfylla kraven för en resonemangspoäng på E-nivå.

## Uppgift 19d

## Elevlösning 1 (0 poäng)

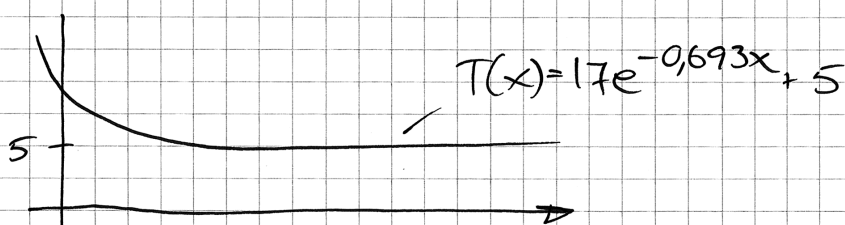
Vi säger att  $x=1000$

$$T(1000) = 17e^{-0,693 \cdot 1000} + 5 = 5 \quad \text{Svar } 5^\circ\text{C (undre gräns)}$$

*Kommentar:* I elevlösningen ansätts enbart ett värde på  $x$  vilket inte är tillräckligt för att dra slutsatsen att uttryckets värde *närmar sig* 5. Lösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (2 C<sub>M</sub>)

Temperaturen blir  $5^\circ\text{C}$ . Det kan vi se när vi ritat upp grafen m.h.j.a. miniräknearen



Grafen sjunker inte under  $y=5$  utan stannar på  $y=5$

Vattnet kan alltså inte bli kallare än  $5^\circ\text{C}$ .

*Kommentar:* I elevlösningen används den matematiska modellens graf för att visa att den undre gränsen är  $5^\circ\text{C}$ . Skalan på  $x$ -axeln framgår inte, grafen går inte genom  $(0,22)$  och det är inte matematiskt korrekt att skriva att "Grafen ... stannar på  $y=5$ ". Trots detta bedöms elevlösningen nått och jämnt uppfylla kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

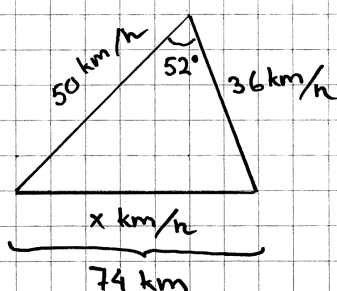
Elevlösning 3 (2 C<sub>M</sub>)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 17e^{-0,693x} + 5 = 5$$

Detta kommer att gå mot noll när  $x$  går mot ~~de~~ oändligheten och blir där då 5. SVAR: Undre gräns är  $5^\circ\text{C}$

*Kommentar:* I elevlösningen används modellen för att visa att den undre gränsen för vattnets temperatur är  $5^\circ\text{C}$ . Elevlösningen uppfyller kraven för två modelleringspoäng på C-nivå.

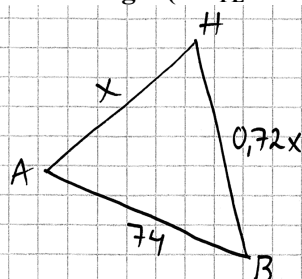
## Uppgift 21

Elevlösning 1 (1 C<sub>PL</sub>)

$$x^2 = 36^2 + 50^2 - 2 \cdot 36 \cdot 50 \cdot \cos 52^\circ \Rightarrow$$

$$x = 39,7444 \text{ km/h}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en godtagbar ansats. Lösningen ges den första problemlösningspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$x$  är sträcken som båt A hinner  
kora

$$\frac{36}{50} = 0,72$$

$$\text{cos sats: } 74^2 = (0,72 \cdot x)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (0,72x) \cos 52^\circ$$

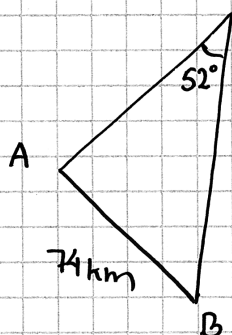
Enligt solve  $\Rightarrow (x_1 = -94,9639)$  ej negativ  
sträcka

$$x_2 = 94,9639$$

$$HA = 94,9639 \text{ km} = 95,0 \text{ km}$$

$$\text{tids } t = \frac{95,0}{50} = 1,9 \text{ h} \quad \text{SVAR: Efter } 1,9 \text{ h}$$

*Kommentar:* Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation förklaras inte kvoten 36/50 i inledningen, tidsberäkningen redovisas inte med formel och figuren saknar "km". Trots detta brister är elevlösningen möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nätt och jämnt kommunikationspoängen på C-nivå.

Elevlösning 3 (2 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

Om tiden är  $t$  blir sidorna

$50t$  och  $36t$

Cosinussatsen:

$$74^2 = 50t^2 + 36t^2 - 2 \cdot 50t \cdot 36t \cdot \cos 52$$

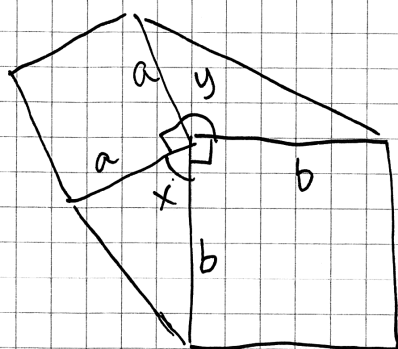
$$5476 = 2500t^2 + 1296t^2 - (3600 \cos 52)t^2$$

$$5476 = 1579t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{5476}{1579}} \quad t = 1,9 \quad \text{Svar } t = 1,9 \text{ h}$$

*Kommentar:* Uppgiften är löst i sin helhet och korrekt. När det gäller kommunikation saknas parenteser i ekvationen som baseras på cosinussatsen och gradtecken på något ställe samt formeln  $s = v \cdot t$ . I övrigt är lösningen välstrukturerad och möjlig att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen två problemlösningspoäng samt nått och jämnt kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 22

Elevlösning 1 (2 A<sub>R</sub>)

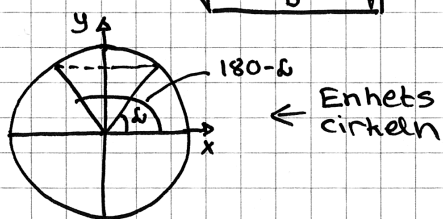
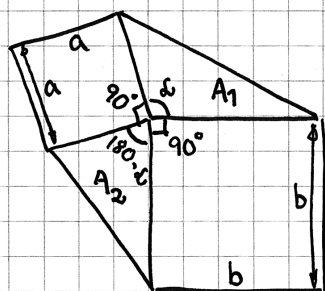
$$\angle y = 360 - 90 - 90 - x = 180 - x$$

$$\sin(180 - x) = \sin x$$

$$A = \frac{ab \cdot \sin x}{2} = \frac{ab \sin(180 - x)}{2}$$

V.S. B

*Kommentar:* Elevlösningen är mycket kortfattad men innehåller det nödvändigaste för att beviset ska vara hållbart, t.ex. hänvisas till sambandet  $\sin(180^\circ - \nu) = \sin \nu$ . Elevlösningen ges därmed nått och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation saknas hänvisning till areasatsen. Dessutom är kopplingen mellan figuren och de areor som tecknats på sista raden otydlig. Gradtecken saknas genomgående. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösning 2 (2 A<sub>R</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

$a =$  sida på kvadrat 1  
 $b =$  sida på kvadrat 2

Areasatsen

$$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin d}{2}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(180-d)}{2}$$

alltså vinkeln  $d$  och  $(180-d)$   
 har samma sinusvärde

$$\frac{ab \sin d}{2} = \frac{ab \sin(180-d)}{2} = A_1 = A_2$$

V.S.V

*Kommentar:* Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och är korrekt. När det gäller kommunikation saknas gradecken på vissa ställen men lösningen är lätt att följa och förstå eftersom bevisets bärande delar förklaras och kopplingen mellan figur och areauttryck är tydlig. Elevlösningen ges två resonemangs- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

## Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A<sub>B</sub>)

$$\begin{aligned}
 & 100 \text{ från början (per gram)} \\
 & \text{hastighet } 5,73 e^{0,0573t} \text{ bakt./min} \\
 & \int_0^t 5,73 e^{0,0573t} dt = 100000 \\
 & = \left[ \frac{5,73 e^{0,0573t}}{0,0573} \right]_0^t = \left[ 100 e^{0,0573t} \right]_0^t \\
 & = 100 e^{0,0573t} - 100 e^0 = 100 e^{0,0573t} - 100 \\
 & = 10000 + 100 = 100 e^{0,0573t} \\
 & \quad 10000 = 100 e^{0,0573t} \\
 & \quad 1001 = e^{0,0573t} \\
 & \quad \ln 1001 = \ln e^{0,0573t} \\
 & \quad 0,0573t = \frac{\ln 1001}{\ln e} \\
 & \quad t \approx 121 \text{ min}
 \end{aligned}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar insikt om att  $\int 5,73e^{0,0573t} dt$  ska beräknas, men tar ingen hänsyn till antalet bakterier då  $t = 0$ . Elevlösningen uppfyller därmed kraven för en begrepps-poäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A<sub>B</sub> och 1 A<sub>PL</sub>)

$$5,73 e^{0,0573t}$$

Gör om från  $f'(x)$  till  $f(x)$

$$f(x) = \frac{5,73 e^{0,0573t}}{0,0573} + C \quad (100 \text{ bakterier från början. } C=100)$$

$$f(x) = 100 e^{0,0573t} + 100 = 100000$$

$$99900 = 100 e^{0,0573t}$$

$$\frac{99900}{100} = e^{0,0573t}$$

$$\ln(999) = 0,0573t$$

$$\frac{\ln(999)}{0,0573} = t$$

$$t \approx 120,5 \text{ min}$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av

$$f(x) = \frac{5,73e^{0,0573t}}{0,0573} + C. \text{ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då } t=0 \text{ men}$$

bestämningen av konstanten är felaktig. Elevlösningen ges därmed en begreppsöäng och en problemlösningsoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A<sub>B</sub>, 1 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

Om  $f(t) = 5,73 e^{0,0573t}$  beskriver hur antalet bakterier förändras per gram så kommer dess primitiva funktion  $F(t)$  att beskriva antalet bakterier som finns per gram.

$$F(t) = \frac{5,73 e^{0,0573t}}{0,0573} + C$$

Vid tillagning, då  $t=0$ , finns det 100 bakterier/gram lax. Alltså är  $F(0) = 100$ .

$$100 = \frac{5,73 e^{-0,0573 \cdot 0}}{0,0573} + C \Rightarrow C = 100 - \frac{5,73 e}{0,0573} = 100 - 100e$$

$$C = 100 - 100e \Rightarrow F(t) = \frac{5,73 e^{0,0573t}}{0,0573} + 100 - 100e = 100 e^{0,0573t} + 100 - 100e$$

Om gränsen är 100000 bakterier så kommer  $F(t) = 100000$  när det blir farligt att äta laxen.

$$F(t) = 100000 = 100 e^{0,0573t} + 100 - 100e \Rightarrow 1000 = e^{0,0573t} + 1 - e$$

$$999 + e = e^{0,0573t}$$

$$\ln(999 + e) = 0,0573t \Rightarrow t = \frac{\ln(999 + e)}{0,0573} \approx 121 \text{ min}$$

Svar: Det tar ca 121 min innan laxen gör en matförgiftad.

Kommentar: Elevlösningen visar insikt om att antalet bakterier som funktion av tiden ges av

$$f(x) = \frac{5,73 e^{0,0573t}}{0,0573} + C. \text{ Lösningen tar hänsyn till att antalet bakterier är 100 då } t = 0 \text{ men}$$

bestämningen av konstanten är felaktig. När det gäller kommunikation är elevlösningen lätt att följa och förstå eftersom funktionsbeteckningar är tydligt definierade, resonemangen kring bestämning av primitiv funktion och konstanten  $C$  är utskrivna och symboler används korrekt, med god anpassning till syfte och situation. Sammantaget ges elevlösningen en begrepps-, en problemlösnings- och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A<sub>B</sub> och 2 A<sub>PL</sub>)

$y = C \cdot a^t$   
 $t = \text{antal } \ddot{a}r$   
 $C = 100 = \text{startm} \ddot{a}ngd$   
 $a = \text{f} \ddot{o}r \ddot{a}n \ddot{d}r \ddot{r}i \ddot{n}gs \text{faktor}$

$v = \frac{\text{antal bakterier}}{\text{min}}$   
 $v(t) = N'(t) \rightarrow V(t) = 5,73 \cdot e^{0,0573t}$  eftersom funktionen har en hastighet bakterier/g/min

primitiv till  $v(t) = N'(t) \rightarrow N(t) = \frac{5,73 \cdot e^{0,0573t}}{0,0573} + C$

$N = \text{antal bakterier}$   $N(t) = 100 \cdot e^{0,0573t} + C$   $e^{0,0573} = a = \text{f} \ddot{o}r \ddot{a}n \ddot{d}r \ddot{r}i \ddot{n}gs \text{faktor}$   
 $N(t) = 100 \cdot 1,05897^t + C$   $N(0) = 100$  alltså m \ddot{a}ste  $C = 0$

$100\,000 = 100 \cdot 1,05897^t$   
 $1000 = 1,05897^t$   
 $t = 120,55 \approx 120 \text{ min}$

Svar: 120 min tar det innan det finns 100 000 st bakterier/g i laken.

*Kommentar:* Elevlösningen visar en metod för att bestämma tiden. När det gäller kommunikation så anses inte elevlösningen vara lätt att följa och förstå. Det beror främst på byte av funktionsbeteckning i inledningen, att  $C$  används med två olika betydelser och att det inte visas hur slutekvationen löses. Sammantaget ges elevlösningen en begreppsöppning och två problemlösningssöppning på A-nivå.

## Uppgift 24a

Elevlösning 1 (1 A<sub>M</sub>)

$$a) D = 1 \cdot x + 40 \cdot 30 \cdot 0,98^x$$

*Kommentar:* Elevlösningen innehåller faktorn  $30 \cdot 0,98^x$  och uppfyller därmed kraven för en modelleringsöppning på A-nivå.